# CHAPITRE N°….. : FONCTION EXPONENTIELLE .

## I) Définition de la fonction exponentielle

1°) Activité d'approche : voir TD n°…….

2°) Définition :

On appelle fonction exponentielle de base e la fonction, notée exp qui , à tout réel x, associe le nombre y tel que ln y = x.
**La fonction exponentielle de base e est la fonction réciproque de la fonction logarithme.**

**Pour x réel quelconque et y réel strictement positif :** $y = \exp x \Leftrightarrow \ln y = x$

Exemples : ln1 = 0 donc exp 0 = 1.

3°) Notation courante :

Nous avons vu dans l'exercice n°1 du TD n°…… que : pour tout entier n, exp (n) = $e^n$.
La notation sous forme d'exposant est étendue à tout réel x : **pour nombre réel x, exp x se note $e^x$** .

4°) Remarque : nous connaissions : $e^5 = e \times e \times e \times e \times e$ et $e^{-3} = \dfrac{1}{e^3} = \dfrac{1}{e \times e \times e}$ mais $e^{\pi}$ ou $e^{\sqrt{2}}$ nous étaient inconnus.

Nous savons maintenant que :
$e^{\pi}$ est le nombre dont le logarithme népérien est π,
$e^{\sqrt{2}}$ est le nombre dont le logarithme népérien est $\sqrt{2}$ .
Ainsi $\ln e^{\pi} = \pi$ *et* $\ln e^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

5°) Savoir déterminer à la calculatrice des valeurs approchées de e et de $e^x$ ( x réel) :

Une valeur approchée de $e^{\pi}$ et $e^{\sqrt{2}}$ est obtenue par l'intermédiaire de la touche $e^x$ de la calculatrice : $e^{\pi} \approx 23{,}14$ et $e^{\sqrt{2}} \approx 4{,}11$.

Pour obtenir à la calculatrice des valeurs approchées de $e^x$ (x réel), on tape : SHIFT ln x EXE ou 2nd ln x ENTER

***Exercice n°1*** : déterminer à la calculatrice la valeur décimale arrondie à $10^{-3}$ près de chacun des nombres suivants : e, $e^{-1{,}45}$, $e^{-\frac{20}{13}}$

## II) Résolution d'équations et d'inéquations :

1°) Propriété 1 : **Pour tout réel x, $e^x$ est strictement positif**.

2°) Propriété 2 : **pour tout réel x :** $\ln\left(e^x\right) = x$

***Exercice n°2*** **:** simplifier les expressions : a) $\ln(e^{-3})$ b) $\ln\left(e^{1+x}\right)$.
*Pour s'entraîner : exercice n°1 p 282*

3°) Résolutions d'équations

**a)** Rappel : **Pour a > 0 et b > 0 on a : ln a = ln b ⇔ a = b**

b) ***Exercice n°3*** **:** résoudre dans ℝ les équations suivantes :
• $e^x = 3$ • $e^x = -3$ • $e^{2x+3} = 0$ • $e^{-x+3} = 2$ • $3e^{2x} = 4$ • $\left(e^x - 2\right)\left(e^x + 1\right) = 0$
*Pour s'entraîner : exercice n°3 p 282*

4°) Résolutions d'inéquations :

a) Rappel : **pour a >0 et b > 0 : ln a < ln b ⇔ a < b.**

b) ***Exercice n°4*** : résoudre dans ℝ les inéquations suivantes :
• $e^{-x+3} > 2$ • $e^{3x} > -1$ • $e^{-2x} < 3$ • $e^{x+1} < -2$ .
*Pour s'entraîner : exercice n°6 p 282*

5°) Propriété 3 : **Pour tout réel y strictement positif :** $e^{\ln y} = y$

***Exercice n°5*** **:** simplifier les expressions : a) $e^{\ln 5}$ b) $e^{2\ln 5}$ c) $e^{-\ln 2}$
Pour tout réel x strictement positif, simplifier : $e^{3\ln x}$ puis $e^{-\ln x}$

*Pour s'entraîner : exercice n°2 p 282 et 33 p 286*

## III) Propriétés de la fonction exponentielle :

# CHAPITRE N°….. : FONCTION EXPONENTIELLE.

1°) Limites

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad et \quad \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
**L'axe des abscisses est asymptote à la courbe d'équation y = $e^x$, au voisinage de -∞.**

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$. **"$e^x$ l'emporte sur x en ∞"**

***Exercice n°6*** **:** Déterminer la limite -∞, en 0 et en +∞ de la fonction f **:**

a) f(x) = $e^x - 2$ définie sur ℝ     b) $f(x) = xe^x + \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

*Pour s'entraîner : exercice n°10 à 13 p 283*

2°) Dérivée :

a) Propriété :

**La fonction exponentielle est dérivable sur ℝ et est égale à sa fonction dérivée.**
**La fonction dérivée de exp :** $x \mapsto e^x$ est exp': $x \mapsto e^x$
**$(e^x)' = e^x$**

***Exercice n°7*** **:** déterminer une équation de la tangente à la courbe de la courbe exponentielle en son point d'abscisse 0. Vérifier avec la calculatrice.

b) Savoir dériver une fonction où figure la fonction exponentielle :

Méthode :

On identifie la forme de la fonction (somme u+v, produit ku, produit uv, quotient $\frac{1}{v}$, quotient $\frac{u}{v}$, $u^n$…).

On calcule les dérivées des éléments formant la fonction : u'(x) =…. ; v'(x) = ….. sachant que e'(x) = $e^x$

On applique les formules de bases : (u+v)' ; (ku)' ; (uv)' ; $\left(\frac{1}{v}\right)'$ ; $\left(\frac{u}{v}\right)'$ ; $(u^n)'$….

On simplifie ou on factorise si nécessaire.

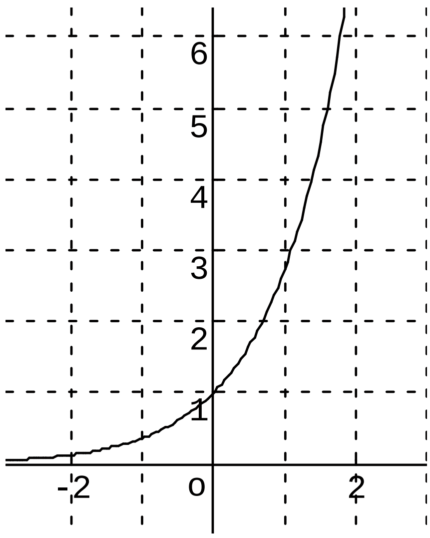
Application :

***Exercice n°8*** **:** Déterminer la dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas suivants puis faire l'étude des variations :

a) f est définie sur ℝ par f(x) = $3e^x - 4x + 3$.     b) f est définie sur ℝ par f(x) = $(-4x+3)e^x$.

c) f est définie sur $]0,+\infty[$ par f(x) = $\frac{e^x}{x}$.     d) f est définie sur ℝ par f(x) = $x^3e^x$

*Pour s'entraîner : exercice n°15, 16, 18 p 283 et exercice n°46 et 49 p 287.*




3°) Variations et représentation graphique :

a) sens de variation : Pour tout nombre réel x, le nombre $e^x$ est strictement positif (voir propriété 1) donc **la fonction exponentielle est strictement croissante sur ℝ.**

b) Tableau de variation :

| | | |
|---|---|---|
| x | -∞ | +∞ |
| (exp) ' (x) | + | |
| (exp)(x) | 0 ↗ | +∞ |

4°) Conséquence de la croissance stricte de la fonction exponentielle sur ℝ

**Pour tous réels a et b, on a :** $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

***Exercice n°9*** **:** Résoudre dans ℝ   a) l'équation $e^{3x-1} = e^{2x+4}$   b) l'inéquation $e^{3x-1} \le e^{2x+4}$

5°) Primitives et intégrale :

**Si f(x) = $e^x$, alors la fonction F définie par F(x) = $e^x$ est une primitive de f sur ℝ.**

# CHAPITRE N°….. : FONCTION EXPONENTIELLE .

***Exercice n°10*** **:** soit f la fonction f définie sur ℝ par f(x) = $3e^x - 4x + 3$.

Calculer une primitive F sur ℝ de la fonction f puis calculer $\int_0^1 f(x)dx$ .

*Pour s'entraîner : exercice n°19 p 283, exercice n°5 1 et 56 p 287*

6°) Exemple d'étude de fonction où figure la fonctio n exponentielle : exercice n°26 p 284.
*Pour s'entraîner TP 1 p 281, n°64 page 289.*

## IV) Relation fonctionnelle

1°) ***Exercice n°11*** **:**

a) Rappels : calculs sur les puissances entières.

Recopier et compléter : $e^2xe^3 = e^{\cdots}$ ; $\frac{e^4}{e^5} = e^{\cdots}$ ; $(e^2)^3 = e^{\cdots}$

b) Les formules faisant intervenir des puissances entières seront –elles encore valables pour des puissances non entières ?
Etablir que la fonction exponentielle "transforme une somme en produit" c'est à dire que :
pour tous nombres réels x et y, $e^x \times e^y = e^{x+y}$ .
Pour cela on utilisera le fait que la fonction ln "transforme un produit en somme".

2°) Propriétés algébriques :
Les formules faisant intervenir des puissances entières sont encore valables pour des puissances non entières :

**Pour tous réels x et y, on a :**
$e^x \times e^y = e^{x+y}$ $\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$ $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ $(e^x)^y = e^{x \times y}$

3°) ***Exercice n°12*** **:** soit x un nombre réel. Ecrire sous la forme $e^u$ les nombres.

a) $\frac{1}{e^{3x}}$ b) $(e^{-2x})^3$ c) $e^x \times e^{-2x}$ d) 1 e) $\frac{e^{x-1}}{e^2}$

*Pour s'entraîner : exercice n°4, 5 et 8 a) et 9 p 2 83. Exercices n°35, 36 p 2861 p 282*

## V) Fonction exp u

1°) ***Exercice n°13*** **:** soit f la fonction définie sur ℝ par f(x) = $e^{3x}$

a) On sait que $e^{3x} = (e^x)^3$ et on rappelle que, si v est dérivable, alors la dérivée de la fonction $v^3$ est $3v^2v'$.
En déduire la dérivée f' de f.
b) Si u est une fonction dérivable sur ℝ, quelle est, parmi les expressions suivantes, celle qui pourrait correspondre à la dérivée de $e^u$ : a) $e^{u'}$ ; b) $e^u$ ; c) $u'e^u$ ?

2°) Dérivée de $e^u$

**u étant une fonction dérivable sur un intervalle I,**
**si f(x) =$e^{u(x)}$ , alors f'(x) =** $u'(x) \times e^{u(x)}$

De façon plus concise, **$(e^u)' = u'e^u$**
*Pour s'entraîner : exercice n°46 et 49 p 287*

3°) Déterminer le sens de variation d'une fonction $e^u$ ou d'une fonction v $e^u$.

***Exercice n°14*** **:** dans chacun des cas suivants, étudier les variations de la fonction f définie sur ℝ par :

a) f(x) = $e^{-x+1}$ b) f(x) = $(2x+3)e^{-x}$ c) f(x) = $\frac{1}{2}e^{2x} - 2x - 1{,}5$

*Pour s'entraîner : exercice n°14 et 17 p 283*

4°) Primitives de $e^u$

**u étant une fonction dérivable sur un intervalle I,**
**$u'e^u$ admet pour primitives sur I les fonctions de la forme $e^u$ + C (où C est une constante).**

***Exercice n°15*** **:** Déterminer une primitive F de la fonction f définie sur ℝ par f(x) = $e^{3x+1}$
*Pour s'entraîner : exercices n°20 à 22 p 283 et 52 à 55 p 287.*

5°) Limites de fonctions composées :

***Exercice n°16 (d'après bac gm c 2007)*** **:** Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels ℝ par : $f(x) = e^{-x} + 2x - 3$ .
Limites aux bornes
a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b) Déterminer la limite de la fonction f en -∞.

On pourra établir au préalable que, pour tout nombre réel x, $f(x) = e^{-x}\left(1 + 2xe^{x} - 3e^{x}\right)$. n°30 3°) p 285

6°) Exemple d'étude de fonction : n°24 p 284, n°63 p 289.

**VI) Sujets d'annales.**

**1°) Problème bac sti gm optiona. Juin 2001.**

Dans tout le problème, le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ ( unités graphiques : 2cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).
Soit la f fonction définie sur ] -∞ ; +∞ [ par : $f(x) = 3e^{-x} + 2x - 4$

Partie A - Construction de la courbe représentative de f

1. a. Déterminer la limite de f en + ∞ . **( 0,5 pt)**
b. Vérifier que $f(x) = e^{-x} ( 3 + 2xe^{x} - 4 e^{x})$
Déterminer alors la limite de f en -∞ . **( 1pt)**
*c.* Soit C la courbe représentative de f et soit D la droite d'équation : y = 2x - 4.
Montrer que D est asymptote à C en + ∞ et étudier la position relative de la droite D par rapport à courbe C. **( 1pt)**
2. a Calculer la dérivée de f. Résoudre l'inéquation d'inconnue réelle x : $-3e^{-x} + 2 \geq 0$. **( 1,25 pt)**
b. Dresser le tableau de variation de f. **( 0,5pt)**
c. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0. **( 0,5 pt)**
d. Déterminer les valeurs exactes du minimum et du maximum de la fonction f sur l'intervalle [-2 ; 5] **( 0,75pt)**
3. Tracer C, D et T dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, pour x variant de -2 à 5 ( sur papier millimétré ) (2 pts)

Partie B - Calcul d'une aire

1. Chercher une primitive de f sur ] -∞ ; +∞ [. **( 2 pts)**
2. a. Montrer que l'équation f(x) = 0 admet sur ]1 ; 2[ une unique solution α dont on donnera une valeur approchée au dixième près. **( 1pt)**
b. Préciser, en le justifiant, le signe de f(x) sur l'intervalle ] α ; +∞ [. **( 0,5 pt)**
c. Calculer, en cm², l'aire du domaine plan limité par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation x =α et x = 4.
En donner une valeur approchée, en utilisant pour a la valeur approchée trouvée précédemment. **( 1pt)**

**2°) Problème bac sti gm optionc. Juin 2004.**

Soit la fonction f numérique définie pour tout nombre réel x par $f(x) = 2 + (2 - x)e^{2x}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$( unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1cm sur l'axe des ordonnées )
**1**. Déterminer la limite de *f* en +∞. **( 1pt)**
**2. a.** Déterminer la limite de *f* en - ∞ ( on pourra poser X = 2*x* ). **( 1pt)**
**b.** En déduire que la courbe C admet une asymptote Δ dont on donnera une équation. **( 0,5 pt)**
**c.** Etudier les positions relatives de C et Δ. **( 1,25pt)**
**3. a.** Montrer que $f'(x) = (3 - 2x)e^{2x}$, où *f '* désigne la fonction dérivée de *f*. **( 1pt)**
b. Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle ]- ∞ , +∞[. **( 1pt)**
**4. a.** Donner une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0. **( 0,5 pt)**
**b.** Tracer Δ, T puis C. ( **2pts)**

**5.** Soit G la fonction numérique définie pour tout nombre réel *x* par : $G(x) = -\frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{5}{4}e^{2x}$ .

Montrer que G est une primitive de la fonction g définie pour tout nombre réel *x* par $g(x) = (2 - x)e^{2x}$ . **( 1,25 pt)**
**6.a** Hachurer la partie A du plan limitée par C, la droite d'équation y = 2 et l'axe des ordonnées. **( 0,25 pt)**
**b.** Calculer l'aire de A. En donner la valeur exacte en unités d'aire. Donner une valeur arrondie de cette aire, en cm², à $10^{-2}$ près. **( 1,25 pt)**