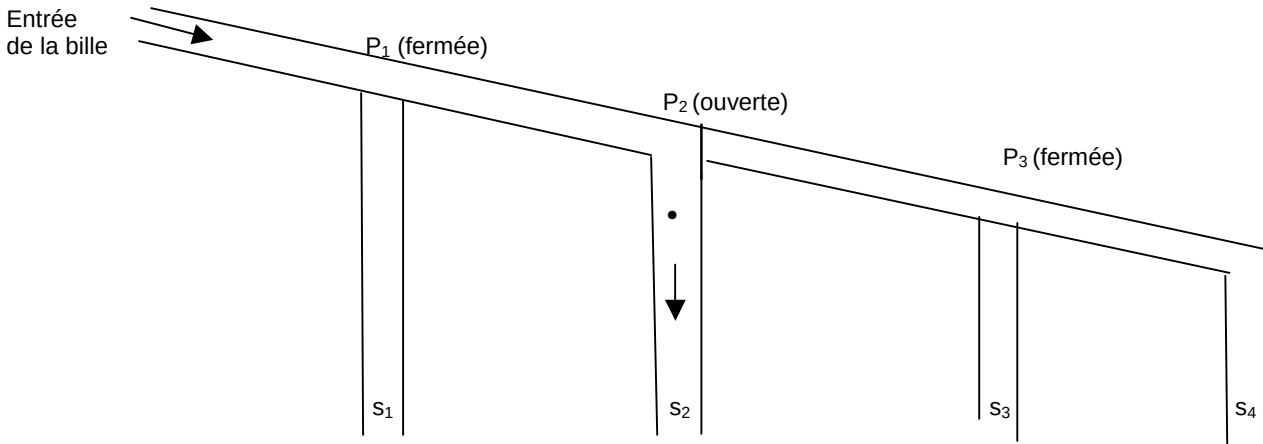


SERIE STI GE,GET,GO, 2001 (sur 4 points).

Un jeu de hasard consiste à introduire une bille dans le tube d'une machine. Cette machine possède trois portes P_1 , P_2 et P_3 qui ferment ou ouvrent les accès aux quatre sorties possibles S_1 , S_2 , S_3 et S_4 . Un système électronique positionne aléatoirement ces trois portes puis libère la bille.



NB : sur le schéma les portes P_1 et P_3 sont fermées, la porte P_2 est ouverte, donc la bille sortira par S_2 .

1. Énumérer en s'aidant éventuellement d'un arbre de choix, toutes les positions simultanées possibles des trois portes et indiquer la sortie imposée à la bille pour chacune de ces configurations.

Par convention, on notera F une porte fermée et O une porte ouverte.

2. On suppose que les huit événements élémentaires, trouvés à la question 1., sont équiprobables.

a. Soit A l'événement $(F ; O ; F)$. Quelle est la probabilité $p(A)$ de l'événement A ?

b. Soit les événements : S_1 : « la bille sort par S_1 ». S_2 : « la bille sort par S_2 »

S_3 : « la bille sort par S_3 ». S_4 : « la bille sort par S_4 ».

Calculer les probabilités $p(S_1)$, $p(S_2)$, $p(S_3)$ et $p(S_4)$ de chacun de ces événements.

3. Pour jouer, on doit miser 7 euros. Si la bille sort par :

S_1 , on ne reçoit rien ; S_2 , on reçoit 5 euros ; S_3 , on reçoit 10 euros ; S_4 , on reçoit 20 euros.

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque sortie possible, associe le gain ou la perte en euros du joueur (en tenant compte de la mise des 7 euros ; par exemple, à la sortie S_4 , X associe 13).

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

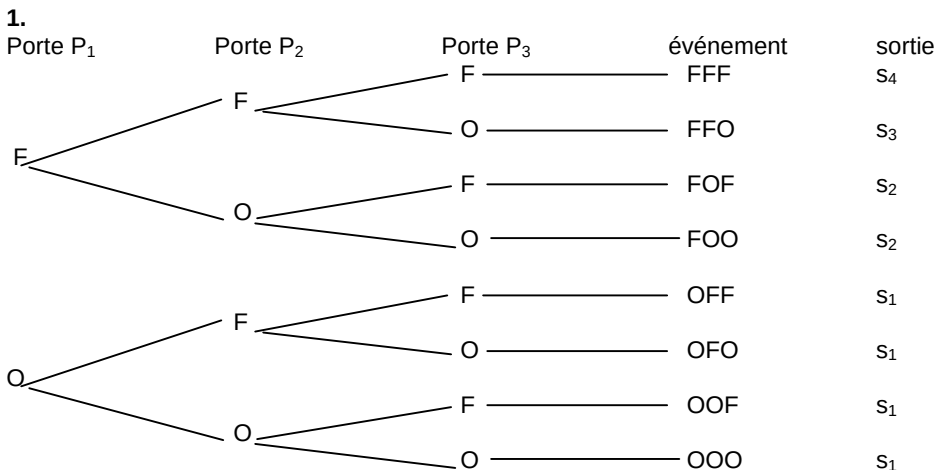
b. Présenter dans un tableau la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X.

4. On veut modifier la mise afin que le jeu soit équitable, c'est à dire que $E(X)$ soit égal à zéro.

Déterminer cette nouvelle mise en justifiant la réponse.

Corrigé.



Les huit événements élémentaires sont (FFF), (FFO), (FOF), (FOO), (OFF), (OFO), (OOF), (OOO).

2. les huit événements élémentaires, trouvés à la question 1., sont équiprobables donc la probabilité d'un événement E est

$$p(E) = \frac{\text{nombre d'éléments de E}}{8}.$$

a. $A = \{(F ; O ; F)\}$. $p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{8}$. Soit $p(A) = \frac{1}{8}$.

b. S_1 : « la bille sort par S_1 ». $S_1 = \{(OFF), (OFO), (OOF), (OOO)\}$ donc $p(S_1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

S_2 : « la bille sort par s_2 ». $S_2 = \{(FOF), (FOO)\}$ donc $p(S_2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

S_3 : « la bille sort par s_3 » $S_3 = \{(FFO)\}$ donc $p(S_3) = \frac{1}{8}$.

S_4 : « la bille sort par s_4 ». $S_4 = \{(FFF)\}$ donc $p(S_4) = \frac{1}{8}$.

3. a. Si la bille sort par s_1 le joueur a perdu 7 euros. ($0 - 7 = -7$).
Si la bille sort par s_2 le joueur a perdu 2 euros. ($5 - 7 = -2$).
Si la bille sort par s_3 le joueur a gagné 3 euros. ($10 - 7 = 3$).
Si la bille sort par s_4 le joueur a gagné 13 euros. ($20 - 7 = 13$).

Les valeurs prises par X sont donc $-7 ; -2 ; 3 ; 13$.

- b. $p(X=-7)=p(S_1)$; $p(X=-2)=p(S_2)$; $p(X=3)=p(S_3)$; $p(X=13)=p(S_4)$
D'après le 2°) le tableau de la loi de probabilité est donc :

x_i	-7	-2	3	13
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Remarque : $\sum_{i=1}^4 p(X=x_i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1$.

- c. L'espérance mathématique de X est $E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i p(X=x_i)$

$$E(X) = -7 \times \frac{1}{2} + (-2) \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{8} + 13 \times \frac{1}{8} = -2. \text{ Soit } E(X) = -2$$

Ce résultat signifie que si le joueur joue à ce jeu un très grand nombre de fois, il va perdre en moyenne 2 euros.

4. On veut modifier la mise afin que le jeu soit équitable, c'est à dire que $E(X)$ soit égal à zéro.
Soit x la nouvelle mise, $E(x)$ est alors égal à $-x \times 0,5 + (-x+5) \times 0,25 + (-x+10) \times 0,125 + (-x+20) \times 0,125$
 $E(x) = 0 \Leftrightarrow -x \times 0,5 + (-x+5) \times 0,25 + (-x+10) \times 0,125 + (-x+20) \times 0,125 = 0$.
 $E(x) = 0 \Leftrightarrow -x \times 0,5 - 0,25x + 1,25 - 0,125x + 1,25 - 0,125x + 2,5 = 0$.
 $E(x) = 0 \Leftrightarrow -x + 5 = 0$.
Pour que le jeu soit équitable il faut donc que la mise soit égale à 5 euros.