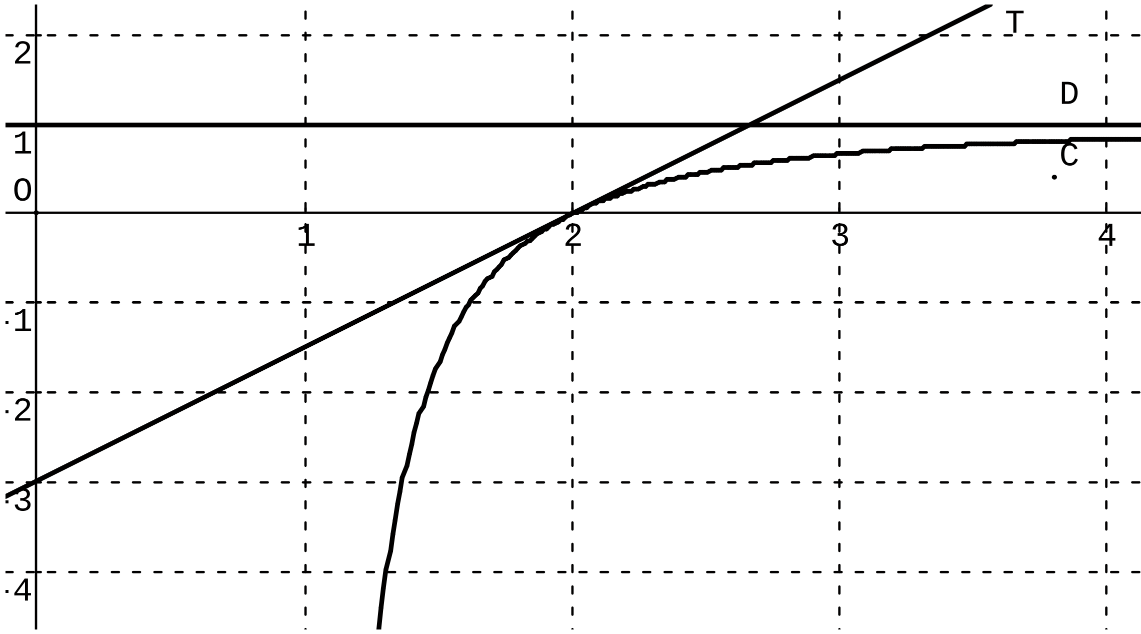
FONCTION LN : BAC STI GE 2003

Problème (11 points) :

Partie A :

On donne dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques : 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées, la représentation graphique C d'une fonction *g* définie, dérivable et strictement croissante sur l'intervalle] 1; + ∞[ainsi que deux droites T et D.
La droite T passe par les points de coordonnées respectives (2,0) et (0,-3).
La droite D a pour équation y = 1.

1 .a. Déterminer graphiquement *g* (2).



b. Sachant que la droite T est tangente à la courbe C au point d'abscisse 2, déterminer graphiquement *g'* (2).

c. On admet que la droite D est asymptote à la courbe C. Déterminer graphiquement la limite de *g* (x) quand x tend vers + ∞ .

d. Sachant que la courbe C coupe l'axe des abscisses en un seul point, étudier graphiquement le signe de la fonction *g* sur l'intervalle] 1; + ∞[.

2. On définit les fonctions g_1, g_2 et g_3 sur l'intervalle] 1 ; + ∞ [par :

$g_1(x) = 1 - \dfrac{1}{x-1}$,

$g_2(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2 - x}$, $g_3(x) = \ln(x-1)$

L'une d'elles est la fonction *g* que l'on se propose d'identifier en utilisant les résultats de la première question.

a. Calculer g_1 (2), g_2 (2), g_3 (2). Ces résultats permettent-ils d'éliminer une des trois fonctions ?

b. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g_1(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g_2(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g_3(x)$. Quelle fonction peut-on alors éliminer ?

c. On note g'_1 et g'_2 les fonctions dérivées respectives de g_1 et g_2. Calculer $g'_1(2)$, $g'_2(2)$ puis conclure.

Partie B

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle] 1 ; + ∞ [par $f(x) = x + 1 + 2 \ln x - 2 \ln (x - 1)$.
On note (C_f) la courbe représentative de la fonction *f* dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1.a. Quelle propriété de la fonction logarithme népérien permet de prouver que, pour tout réel *x* appartenant à l'intervalle] 1 ; + ∞ [,
$f(x) = x + 1 + 2\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$?

b. Déterminer la limite de *f* en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe (C_f) ?

2.a. Déterminer la limite de *f* en + ∞ .

b. Justifiez que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe (C_f).

c. Montrer que pour tout *x* de l'intervalle] 1 ; + ∞ [, $\dfrac{x}{x-1} > 1$.

Quel est alors le signe de $\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ pour *x* appartenant à] 1 ; + ∞ [?

d. En déduire la position de la courbe (C_f) par rapport à la droite (Δ).

3. a. Déterminer la fonction dérivée *f'* de la fonction *f* et vérifier que, pour tout *x* appartenant à l'intervalle] 1 ; + ∞ [,
$f'(x) = g(x)$ où *g* est la fonction trouvée dans la partie A.

b. A l'aide des résultats graphiques obtenus dans la partie A, dresser le tableau de variation de la fonction *f*.

Partie C

1. Montrer que, sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$, la fonction H définie par :
$H(x) = x \ln x - (x - 1) \ln (x - 1)$ est une primitive de la fonction h définie par $h(x) = \ln x - \ln (x - 1)$ sur cet intervalle.

2.a. Sur la feuille annexe jointe, à rendre avec la copie, on a représenté la courbe (Cf). Sur cette figure, représenter la droite (Δ) et hachurer la partie du plan comprise entre la droite (Δ), la courbe (C_f) et les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.

b. On désigne par A la valeur de l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan hachurée précédemment. Donner la valeur exacte de A puis une valeur décimale approchée à 10^{-2} près par excès.

<u>**Annexe :**</u> **Représentation de la courbe (C_f).** A rendre avec la copie.