CHAPITRE N°……. : AIRES ET PRIMITIVES.

I) Intégrale d'une fonction sur un segment

1°) Définition :

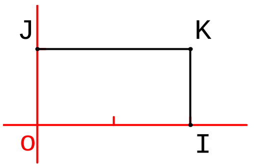
Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I, F une primitive de f sur I, a et b deux éléments de I.
On appelle *intégrale de a à b de f* le nombre réel F(b) – F(a). On note : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

$\int_a^b f(x)dx)$ se lit « somme de a à b de f de x dx ». $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$

2°) Application : a) calculs d'intégrales à l'aide d 'une primitive : **Exercice n°1** : TP 1 page 330. Exercices n°1 à 7 page 336.
b) exemples de situations où une primitive est donnée : **Exercice n°2 :** TP 3 page 330. Exercices n°22 et 23 page 337.

II) Unité d'aire :

Dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$, soit I(1,0), J(0,1) et K(1,1).
On appelle unité d'aire, et on note u.a., l'aire du rectangle OIKJ.

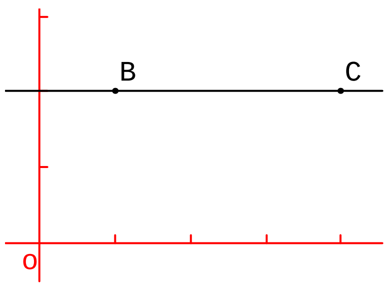


Exemples :
1) Dans le repère ci-dessus les unités graphiques sont : 2cm en abscisse, 1 cm en ordonnée.
L'unité d'aire est 2 cm^2. On écrit : 1 u.a = 2 cm^2
2) Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthogonal d'unités graphiques : 2cm en abscisse, 3 cm en ordonnée.
L'unité d'aire est 6 cm^2. On écrit : 1 u.a = 6 cm^2

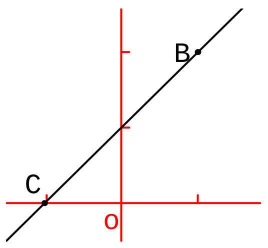
III) Fonction dérivable sur un intervalle [a,b], ne prenant que des valeurs positives sur cet intervalle

1°) Trois exemples. **Exercice n°3 :** Dans chacun des cas ci-dessous :
L'unité de longueur est le cm, l'unité d'aire est le cm^2 et les repères utilisés sont orthonormaux .
La droite (BC) est la représentation graphique d'une fonction affine f.
a) Hachurez le domaine délimité par la droite (BC), l'axe des abscisses, les droites d'équations x = a et x = b puis calculez l'aire de ce domaine.
b) Déterminez une équation de la droite (BC). En déduire la fonction f.
c) Déterminez une primitive F de la fonction f et vérifiez que l'aire calculée dans le a) est égale à F(b) – F(a).

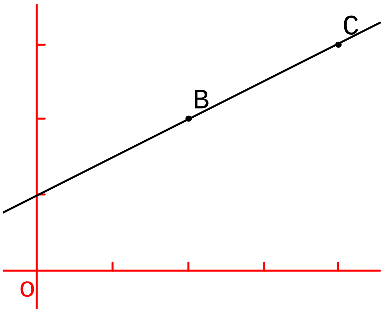
1er cas : rectangle a =1 et b = 4



2^{ième} cas : triangle rectangle
a = -1 et b = 1



3^{ième} cas : trapèze rectangle
a = 2 et b = 4

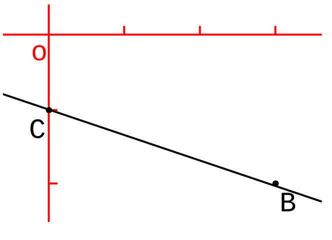


2°) Cas général :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle [a,b], ne prenant que des valeurs **positives** sur [a,b]. On appelle C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.
L'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie de plan limitée par C, l'axe des abscisses, la droite d'équation x = a et la droite d'équation x = b est égale à : $\int_a^b f(x)dx$.

IV) Fonction dérivable sur un intervalle [a,b], ne prenant que des valeurs négatives sur cet intervalle

1°) **Exercice n°4 :** même énoncé que pour l'exercice n°1
Trapèze rectangle.
a= 0 et b = 3



2°) Cas général :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle [a,b], ne prenant que des valeurs **négatives** sur [a,b].
On appelle C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.
L'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie de plan limitée par C, l'axe des abscisses, la droite d'équation x = a et la droite d'équation x = b est égale à : - $\int_a^b f(x)dx$.

CHAPITRE N° ……. : AIRES ET PRIMITIVES.

V) Exercice type BAC

Exercice n°5 (bac gm 2006 polynésie).

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A : Calcul d'une primitive.

On note g la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 2] par $g(x) = \frac{x}{x+1}$

a. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ; 2] $g(x) = a + \frac{b}{x+1}$,

b. En déduire une primitive de g sur l'intervalle [0 ; 2]

Partie B : Détermination du centre de gravité d'une plaque homogène.

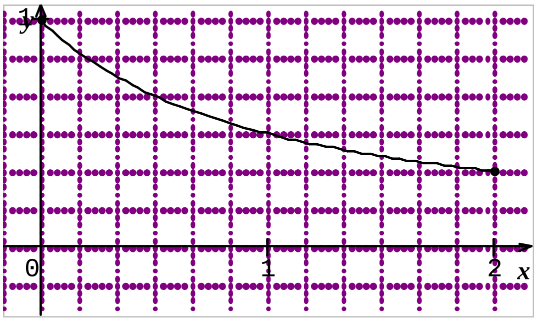
On note *f* la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 2] par : $f(x) = \frac{1}{x+1}$

On considère une plaque homogène formée par l'ensemble des points M(*x ; y*) du plan dont les coordonnées vérifient les relations : $0 \le x \le 2$ et $0 \le y \le f(x)$ (Voir schéma ci-dessous).

a. Soit S l'aire de la plaque exprimée en unité d'aire. Démontrer que S = ln 3.
b. Soit G le centre de gravité de la plaque. On admettra que les coordonnées (X ; Y) de G sont données par les formules suivantes :

$X = \frac{1}{S}\int_0^2 xf(x)dx$ et $Y = \frac{1}{2S}\int_0^2 (f(x))^2 dx$

Calculer la valeur exacte de X, puis une valeur approchée arrondie au centième.
Calculer la valeur exacte de Y, puis une valeur approchée arrondie au centième.



VI) Aire de la partie limitée par deux courbes représentatives :

Théorème :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle [a,b], telles que pour tout nombre réel x de [a,b], $g(x) \le f(x)$.
L'aire de la partie du plan limitée par les courbes représentatives de f et de g et les deux droites d'équations respectives x = a et x = b est
$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

Exercice n°6 : Soit f et g les fonctions définies sur ℝ respectivement par
$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 3$ et $g(x) = x^2$, représentées respectivement par C et Γ dans le repère orthonormal ci-contre d'unité graphique 1 cm.

a) Etablir le tableau de signe de h(x) = f(x) –g(x) et en donner une interprétation graphique.

b) Calculer l'aire A, exprimée en cm², de la partie limitée par C et Γ et les droites d'équations $x = -\frac{3}{2}$ et $x = \frac{3}{2}$.