TD N°…… : AIRES ET PRIMITIVES.

TPMSM : travail à faire pour le lundi 3 mars (annule et remplace les exercices prévus initialement).
Faire le TD en entier.

I) Intégrale d'une fonction sur un segment

Exercice n°1 : calculs d'intégrales à l'aide d'une primitive.
Dans chacun des cas calculer la valeur exacte de l'intégrale I

1°) <u>Cas "simples"</u> : a) I = $\int_1^2 \left(x^2+x+3\right)dx$ b) I = $\int_{-3}^{1}\left(4t^3+1\right)dt$.

Remarque : dans l'écriture , la lettre utilisée est sans importance : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$

2°) <u>Cas où f est une fonction du type u'u ^{n}</u> :

a) I = $\int_1^2 (2x+1)\left(x^2+x+3\right)dx$. b) I = $\int_1^2 \left(x^3+1\right)\left(x^4+4x+3\right)^2 dx$. *Pour s'entraîner : exercices 5, 6, 14 page 336.*

3°) <u>Cas où f est une fonction du type $\frac{u'}{u}$</u> : I = $\int_2^3 \frac{3}{(x-1)}dx$. *Pour s'entraîner : exercices n°11à 13 p 336.*

4°) <u>Cas où f est une fonction du type $\frac{u'}{u^2}$</u> : I = $2\int_{-1}^{0}\frac{5}{(1-3x)^2}dx$. *Pour s'entraîner : TP 1 4°) p 330, exercices n°7 page 336.*

Exercice n°2 : <u>exemple de transformation de l'écriture d'une fonction rationnelle pour calculer un intégrale</u> : exercice 21 p 337.

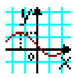
Exercice n°3 **:** <u>exemple de situation où une primitive est donnée</u> (d'après bac gm 2006 (A et F)).

Soit f la fonction définie sur l'intervalle]-1, +∞ [par : f(x) = $\frac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$

Démontrer que sur l'intervalle]-1, +∞ [, la fonction f définie par F(x) = $(-3-x)\ln(1+x)+3x$ est une primitive de la fonction f.

Calculer $\int_0^2 f(x)dx$

Vérifier le résultat obtenu avec le logiciel sinéquanon.
a. Télécharger le logiciel si nécessaire (gratuit sur internet)
b. Lancer le logiciel.

ouvrir le logiciel sinequanon dont l'icône est : 
sinequanon.exe

Si l'icône ne figure pas sur le bureau, utiliser la commande Démarrer/Rechercher… pour localiser le fichier sinequanon.exe.

c. Tracer la courbe représentative de la fonction $f(x)=\frac{2x}{1+x}-\ln(1+x)$ (fonction de l'exercice n°3) **:**

- Cliquer sur l'outil "définir une fonction" .
- Sur l'écran de saisie des fonctions, taper l'expression de la fonction.

d. Déterminer l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie de plan limitée par C, l'axe des abscisses, la droite d'équation x = 0 et la droite d'équation x = 2

- Cliquer sur calculs .
- Sélectionner : intégration : méthodes des rectangles, trapèzes.
- Taper l'expression de la fonction à intégrer : 2x/(1+x)-ln(x+1).
- Compléter l'intervalle d'intégration : a = 0 et b=2.
- Compléter le nombre de segments : 30
- Sélectionner Trapèzes puis OK.

Sur l'écran est affiché une approximation de l'aire hachurée en unité d'aire.

Comparer le résultat obtenu avec $\int_0^2 f(x)dx$ calculé précédemment.

Exercice n°4 : autre exemple de situation où une primitive est donnée (d'après bac gm 2006 nouvelle Calédonie).

Soit h la fonction définie pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle]0,+∞[par $h(x)=\frac{2}{x}\ln x$.

Démontrer que la fonction H définie sur l'intervalle]0,+∞[par $H(x)=(\ln x)^2$ est une primitive de h sur cet intervalle.

En déduire une primitive Φ de la fonction φ définie sur]0,+∞[par $\varphi(x)=\frac{2\ln x-1}{x}$. Calculer $\int_{\sqrt{e}}^{e}\varphi(x)dx$.

Pour s'entraîner : TP 3 page 330. Exercice n° 22 page 337.

TD N°……. : AIRES ET PRIMITIVES.

II) Fonctions dérivables sur un intervalle [a,b], ne prenant que des valeurs positives sur cet intervalle.

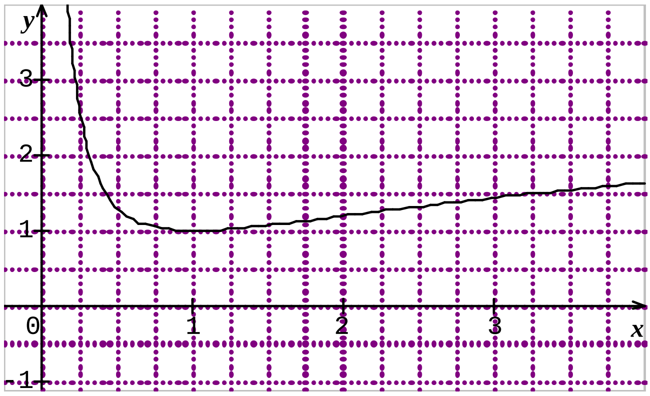
Exercice n°5 : d'après bac gm nouvelle Calédonie novembre 2005.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$; unité graphiques : 2cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.

Partie A : Etudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle]0, +∞ [

$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$.

Le tracé de la courbe représentative C est donné ci contre :



Partie B :

a) Soit H la fonction définie sur]0, +∞ [par H(x) = xlnx-x

Déterminer la fonction dérivée de la fonction H et en déduire une primitive de la fonction f sur l'intervalle]0, +∞ [

b) Démontrer que la fonction f est positive sur l'intervalle [1,2].

c) Soit E le domaine du plan défini par l'ensemble des points M(*x ; y*) dont les coordonnées vérifient les relations : $1 \leq x \leq 2$ et $0 \leq y \leq f(x)$ Calculer l'aire du domaine E. On donnera le résultat arrondi au mm^2.

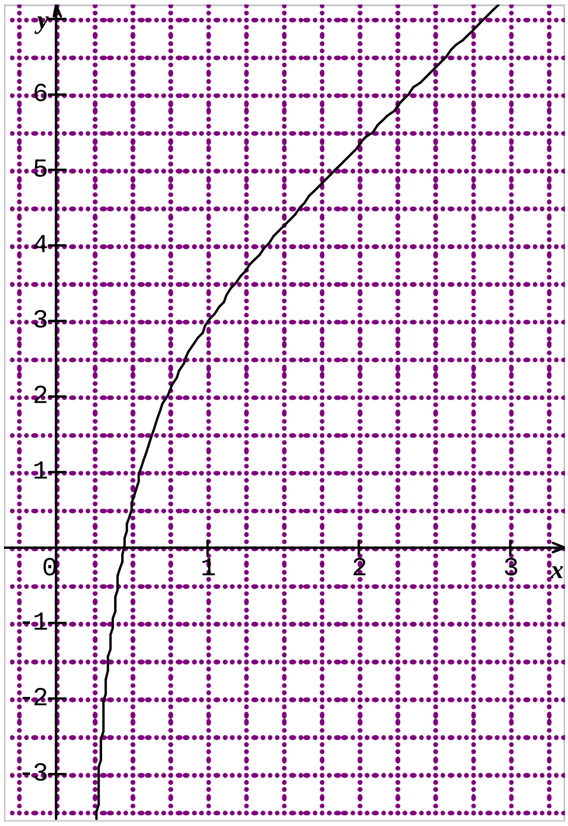
Vérifier le résultat obtenu avec Sine qua non.

Exercice n°6 : d'après bac gm antilles guyane B et D 2005.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$; unité graphiques : 2cm en abscisses et 1 cm en ordonnées.

Soit f la fonction f définie sur l'intervalle]0, +∞ [par $f(x) = 2x + 1 + \frac{\ln x}{x}$.

Le tracé de la courbe représentative C est donné ci contre :



a) Soit F la fonction définie sur]0, +∞ [par F(x) = $x^2 + x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$

Montrer que F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle]0, +∞ [

b) Soit E le domaine du plan délimitée par la courbe C, l'axe des abscisses, les droites d'équation respectives x = 1 et x = e.

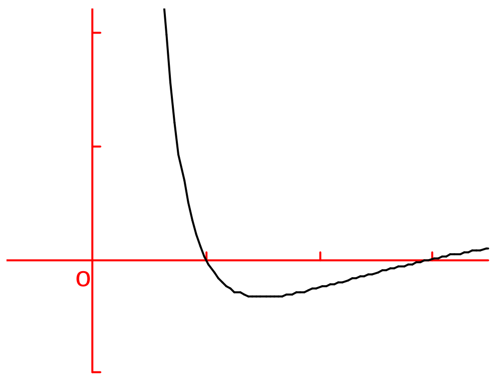
Calculer l'aire du domaine E. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au cm^2.

Vérifier le résultat obtenu avec Sine qua non.

III) Fonction dérivable sur un intervalle [a,b], ne prenant que des valeurs négatives sur cet intervalle

Exercice n°7 : on considère la fonction g définies sur]0, +∞ [par $g(x) = 1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}$

1. Déterminer une primitive G de g sur]0, +∞ [.
2. Le tracé de la courbe C représentant g dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ est donné sur la figure ci-contre.



Soit la partie E du plan limitée par la courbe C, les droites d'équations x = 1 et x = 3, et l'axe des abscisses.

Déterminer l'aire A du domaine E dans l'unité d'aire définie par le repère.

On donnera sa valeur exacte, puis une valeur décimale approchée à 0,01 près.

Vérifier le résultat obtenu avec Sine qua non.