CHAPITRE ….: FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

I) Définition de la fonction logarithme népérien

1°) Activité d'approche : voir exercices n°1 et 2 d u TD n°…..

2°) Définition :

la fonction **logarithme népérien** est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur]0, +∞[qui prend la valeur 0 pour x = 1

notation : $\ln :]0,+\infty[\to R$, $x \mapsto \ln x$

on a : **ln1 = 0**

Exercice n°1 :

a) Déterminer toutes les primitives de la fonction h : $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur]0, +∞[(utiliser la définition ci-dessus).

Quelle est la primitive de h qui vaut -3 pour x = 1 ?

b) Calculer ln ($x^2 - 1$) pour x = $\sqrt{2}$ et pour x = - $\sqrt{2}$.

c) Déterminer une primitive sur l'intervalle donné de la fonction : $f(x) = \frac{3}{x}$ sur]0, +∞[. $f(x) = 2x - 3 - \frac{4}{x}$ sur]0, +∞[

Pour s'entraîner : exercices n°19 et 20 page 249 (calcul de primitive)

3°) Déterminer la dérivée d'une fonction où figure la fonction logarithme :

la fonction ln est une fonction nouvelle ; ce n'est ni une fonction polynôme, ni une fonction rationnelle.

la fonction ln est dérivable sur]0 , +∞[et, pour tout x de]0 , +∞[, (ln x)' = ln' x = $\frac{1}{x}$

Exercice n°2 **:** calculer la dérivée de la fonction f sur]0 , +∞[par :

a) f(x) = $0{,}5x^2 + x - \ln x$ b) f(x) = 4 lnx c) f(x) = $\frac{1}{x} + \ln x$ d) f(x) = $\frac{\ln x}{x}$

e) f(x) = $x \ln x$ f) f(x) = $(\ln x)^2$

Méthode :

On identifie la forme de f (somme u+v, produit ku, produit uv, quotient $\frac{1}{v}$, quotient $\frac{u}{v}$, u^n…).

On calcule les dérivées des éléments formant la fonction : u'(x) =…. ; v'(x) = ….. sachant que ln'(x) = $\frac{1}{x}$

On applique les formules de bases : (u+v)' ; (ku)' ; (uv)' ; $\left(\frac{1}{v}\right)'$; $\left(\frac{u}{v}\right)'$; $(u^n)'$….

On simplifie ou on factorise si nécessaire.

Pour s'entraîner : exercices n°14,15, 16, 17 page 24 9 et 48, 49 page 251 (calcul de dérivées).

4°) Etudier une fonction définie avec un logarithme :

Exercice n°3 : Soit f la fonction définie sur]0, +∞[par f(x) = x^2 + 1 –2ln(x). Etudier les variations de f.

5°) Déterminer l'ensemble sur lequel est définie un e expression de la forme ln(u(x)).

On ne peut pas calculer le logarithme d'un nombre négatif, ni de 0.

Exercice n°4 :

a) indiquer parmi les valeurs de x suivantes celles pour lesquelles le nombre ln (x+2) existe :
10 ; 5,1 ; 0; -0,5 ; -1 ; -2 ; -3 ; -11 .

b) On considère la fonction f définie par f(x) = ln (x+2). Résoudre dans ℝ l'inéquation 2+ x > 0. En déduire les valeurs de x pour lesquelles f(x) existe.

c) Déterminer l'ensemble sur lequel est définie l'expression suivante : ln(x – 3) .

d) Déterminer l'ensemble sur lequel est définie l'expression suivante : ln(1 – x) + ln (2x).

Méthode : on résout les inéquations u(x) >0 (ou les inéquations u(x) >0 et v(x) >0)

II) Etude de la fonction ln

1°) Sens de variation et courbe représentative.

Exercice n°5 :

CHAPITRE ….: FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

a) Compléter le tableau suivant :

x	10	1 000	10^6	10^9
ln x				

Nous constatons que ln x augmente "lentement" quand x augmente : pour x = 1 milliard, ln x est encore voisin de 20.
Est-ce que ln x peut dépasser 100?
Nous admettrons que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

b) Compléter le tableau suivant :

x	0,1	0,001	10^{-6}	10^{-9}
ln x				

Nous admettrons que : $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$. En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe (écrire son équation).

c) Etudier les variations de la fonction logarithme népérien (calcul de la dérivée, étude du signe de la dérivée et tableau de variation).
d) Compléter le tableau de valeurs suivant en utilisant la touche LN d'une calculatrice.

x	0,1	0,5	1	2	3	4	6
ln x							

Tracer la courbe représentative de la fonction logarithme dans un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

e) On observe sur le graphique qu'il existe un nombre x pour lequel on a ln x = 1. On note e ce nombre : **ln e = 1.**
Compléter le tableau suivant :

x	2,6	2,7	2,8	2,9
ln x				

En déduire la valeur de e arrondie à 0,1 près.
Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée de e à 0,01 près.

Pour s'entraîner : exercice n°9 page 248 et 42 page 251. Exercices n°70 et 71 page 255.

2°) Résolutions graphiques :
Exercice n°6 :
a) A l'aide d'une calculatrice et de la représentation graphique de la fonction logarithme népérien, donner une valeur approchée du réel x tel que ln x = 2.
b) Reprendre le a) avec ln x = -1.

Propriété : **Pour tout réel y, l'équation ln x = y admet une solution et une seule**

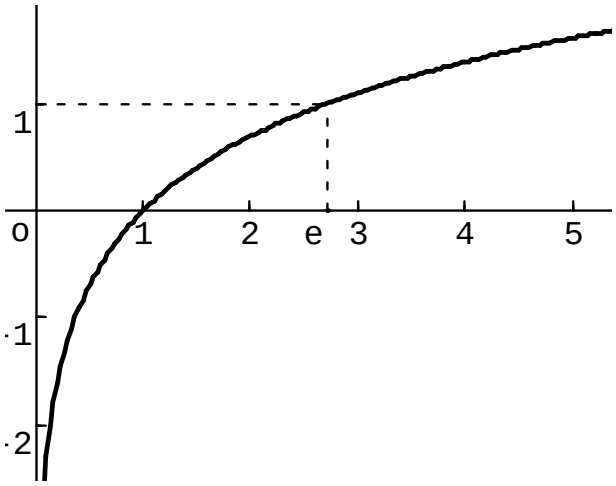
c) Résoudre en utilisant le graphique l'inéquation ln x > 0.
d) Résoudre en utilisant le graphique l'inéquation ln x < 0.

3°) Ce qu'il faut savoir :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

Tableau de variation de la fonction ln et représentation graphique de ln.

Valeurs de x	0	1	e	+∞
Signe de f'(x) = $\frac{1}{x}$	||	+		
Variations de f(x) = ln(x)	-∞ ||	0 ↗	1	+∞



Nombre e : ln(e) = 1 et e ≈ 2,718.
e s'obtient sur une calculatrice avec la touche e^x dans le cas où x = 1.

Signe de ln(x) : ln x = 0 ⇔ x = 1
ln x < 0 ⇔ 0 < x < 1
ln x > 0 ⇔ x > 1

Comparaison de deux logarithmes : la fonction ln est **strictement croissante sur**]0, +∞[donc ln (a) et ln(b) sont rangés dans le même ordre que a et b.
Autrement dit : pour a > 0 et b > 0 on a : ln a = ln b est équivalent à a = b
ln a < ln b est équivalent à a < b
ln a > ln b est équivalent à a >b

4°) ***Exercice n°7 :***

Soit la fonction f définie sur]0, +∞[par : $f(x) = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} + 1$

a) Calculer f '(x)
b) Etudier le signe de f'(x) et en déduire les variations de f.
c) Dresser le tableau de variation de f.
d) Déterminer pour quelle valeur de x, la fonction atteint son maximum et préciser la valeur de ce maximum.
e) Compléter le tableau de valeurs suivant (donner les valeurs de f(x) à 10^{-2} près).

CHAPITRE ….: FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

x	0,2	0,5	1	1,5	2	4	6
f(x)							

f) Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm)
g) Déterminer à l'aide d'une calculatrice graphique une valeur approchée à 10^{-2} près par excès de la solution de l'équation f(x) = 0.

III) Résolution d'équations et d'inéquations :

1°) Propriétés :

Pour a > 0 et b > 0 on a : ln a = ln b est équivalent à a = b
ln a < ln b est équivalent à a < b
ln a > ln b est équivalent à a >b

2°) Savoir résoudre une équation comportant un logar ithme.

Exercice n°8 *:* Résoudre dans $\left]\frac{1}{5};+\infty\right[$ l'équation (E) : ln (5x –1) = 0.

Méthode :
On détermine l'ensemble de définition D sur lequel l'équation est définie.
On ramène l'équation à une équation de la forme lna = lnb.
On résout l'équation a = b.
On élimine les éventuelles solutions qui n'appartiennent pas à D.

3°) Savoir résoudre une inéquation comportant un lo garithme :

Exercice n°9 *:* Résoudre dans $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ l'inéquation: ln (2x –3) < 1

Pour s'entraîner : exercice n°6 page 248. Exercices ° 31 a) page 250 et 32b) page 250, exercice n°39 page 251.

4°) Savoir étudier le signe d'une fonction :

Exercice n°10 : Etudier le signe de la fonction f définie sur]0, +∞[par f(x) = (x-1) lnx.

5°) Savoir étudier le sens de variation d'un foncti on :
Exercice n°11 : Etudier les variations de la fonction f définie sur]0, +∞[par f(x) = xlnx –2x.

IV) Propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien.

1°) Découvrir les propriétés algébriques de la fonc tion ln : voir exercices n°3 et 4 du TD n°

2°) Formules fondamentales :

a et b sont deux nombres réels strictement positifs :

Logarithme d'un produit : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

Logarithme d'un inverse : $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$

Logarithme d'un quotient : $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

Logarithme d'une puissance : $\ln(a^n) = n \ln a$ avec n entier relatif.

Logarithme d'une racine carrée : $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$

Exemples : $\ln(20) - \ln(10) = \ln\left(\frac{20}{10}\right) = \ln(2)$, $\ln(32) = \ln(2^5) = 5\ln 2$, $\frac{1}{2}\ln(49) = \ln\left(\sqrt{49}\right) = \ln(7)$.

3°) Logarithme d'une puissance de e :

Exercice n°12 :
a) Utiliser les propriétés algébriques de la fonction ln pour calculer les nombres :
$\ln\left(\frac{1}{e}\right)$; $\ln(e^2)$; $\ln(e^5)$; $\ln(e^n)$ où n est entier relatif ; $\ln\left(\sqrt{e}\right)$; $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$.

b) Rappel : a est un nombre réel et n est un nombre entier : $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

calculer $\ln(e^{-2})$, $\ln(e^{-n})$ où n est un nombre entier.

c) Exprimer en fonction de ln2 les nombres suivants :

CHAPITRE ….: FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

$\ln(2e)$; $\ln\left(\frac{e}{2}\right)$; $\ln(2e^3)$; $\ln(4e^3)$; $\ln\left(\frac{2}{e^2}\right)$.

d) Ecrire les entiers suivants sous la forme $\ln(e^n)$: 4, -1, 6 et –3.

A retenir :	$\ln(e^n) = n$ où n est un entier relatif. $(\ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$

4°) Simplifier des expressions où figurent des loga rithmes :

Exercice n°13 : a) Ecrire plus simplement : A = $\frac{1}{2}\ln e - 5\ln e^2 - \ln\frac{1}{e}$

b) Calculer en fonction de ln 2 : B = ln 2 + ln (4e) – ln ($16e^2$)

c) Calculer en fonction de ln 3 : C = $\ln(\sqrt{3}) - \ln 81 + \ln(3e)$.

5°) Résoudre une équation.

Exercice n°14 : résoudre dans ℝ, les équations suivantes :

a) ln x = 4

b) ln(x) = -2.

c) ln(2)+2ln(x)=ln(3)

d) ln(x) - ln(4) = ln(4-x)

Méthode :

- On détermine l'ensemble D sur lequel l'équation est définie.
- On ramène l'équation à une équation de la forme ln(a) = ln(b), en utilisant les propriétés algébriques de la fonction logarithme.
- On résout l'équation a = b
- On élimine les éventuelles solutions qui n'appartiennent pas à D.

Exercice n°15 *:* Bac STT CG et IG juin 1998

Soit P la fonction polynôme, définie sur ℝ par P(x) = $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$

a) Montrer que : P(x) = (2x + 1) (x^2 + x – 6) puis résoudre l'équation P(x) = 0.

b) Résoudre dans ℝ l'équation : $2(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 11\ln x - 6 = 0$

Pour s'entraîner : exercice n°1 à 5 p 248 , 31 à 37 p 250.

6°) Résoudre une inéquation.

Exercice n°16 : résoudre dans]0 ; +∞[, l'inéquation ln x ≤ 2.

Pour s'entraîner : exercice n°6 à 8 p 249 et 38 p 254.

7°) Etude d'une fonction avec la fonction ln : exer cice n°68 p 254.

Pour s'entraîner : exercice n°67 p 254 et 69 p 254.

V) Fonction de la forme ln[(u(x)]

1°) Fonction dérivée :

a) Théorème :

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I. La fonction f définie sur I par f(x) = ln [u(x)] est dérivable sur I et f'(x) = $\frac{u'(x)}{u(x)}$.

b) ***Exercice n°17*** : Soit la fonction définie sur [30,200] par $f(x) = 0{,}02x^2 - 90\ln(0{,}001x)$. Déterminer f'(x) pour tout x de [30,200].

Pour s'entraîner : exercices n°18 page 249, n°50, 51 , 52, 53 page 251.

2°) Etudier les variations d'une fonction ln[u(x)] .

Exercice n°18 **:** ♦ Etudier les variations de la fonction f définie sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ par f(x) = ln (-2x + 1) .

♦ Etudier les variations de la fonction f définie sur ℝ par f(x) = ln ($3x^2$ + 2x + 1) .

VI) Limites :

CHAPITRE ….: FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

1°) Comparaison de lnx et x^n.

Exercice n°19 : a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x$. Peut-on conclure directement pour $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$?

b) Recopier et compléter le tableau suivant :

x	100	1 000	10^6	10^9
$\dfrac{\ln x}{x}$				

On admettra que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0}$. Ce résultat peut se retenir sous la forme imagée suivante : « x l'emporte sur ln en +∞ ».

Conséquence : Pour tout nombre entier naturel non nul n, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0}$

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x$ et $\lim\limits_{x\to0} x$. Peut-on conclure directement pour $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x$?

d) Recopier et compléter le tableau suivant :

x	0,01	0,001	10^{-6}	10^{-9}
xln x				

Nous admettrons que : $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0}$. Ce résultat peut se retenir sous la forme imagée suivante : « x l'emporte sur ln en 0 ».

Pour s'entraîner : exercices n°10 à 13 page 249. n°4 3 à 46 p 251.

2°) Exercice n°27 page 173

3°) Limites de fonctions composées : limite de ln[u (x)]

Exercice n°20 : Soit la fonction f définie sur]-∞,0[par f(x) = $\ln\left(x^2 - x\right)$. On souhaite déterminer les limites de f en 0 et en -∞. Pour cela, on pose $X = x^2 - x$.

a) déterminer $\lim\limits_{x\to0^-} X$. Soit λ le résultat obtenu, déterminer $\lim\limits_{X\to\lambda} \ln X$ puis en déduire $\lim\limits_{x\to0^-} \ln\left(x^2 - x\right)$.

b) déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} X$. . Soit λ le résultat obtenu, déterminer $\lim\limits_{X\to\lambda} \ln X$ puis en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(x^2 - x\right)$.

Exercice n°21 : Soit la fonction f définie sur]0,+∞[par f(x) = $\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$. On souhaite déterminer les limites de f en 0 et en +∞.

Pour cela, on pose $X = \dfrac{x}{x+1}$.

a) déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} X$ puis $\lim\limits_{x\to0^+} \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

b) déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} X$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

Pour s'entraîner : exercice n°45 et46 page 251

VII) Primitive de $\dfrac{u'}{u}$

1°) Théorème :

Soit u une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur un intervalle I.

La fonction définie par f(x) = $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ admet sur I pour primitives :

$x \mapsto \ln[u(x)] + C$, si u(x) > 0 sur I,

$x \mapsto \ln[-u(x)] + C$, si u(x) < 0 sur I, où C est une constante réelle.

2°) Application : ***Exercice n°22*** : a) Déterminer une primitive de f(x) = $\dfrac{3x^2}{x^3+4}$ sur]0,+∞[

b) Déterminer une primitive de f(x) = $\dfrac{1}{x-2}$ sur]-∞,2[.

Pour s'entraîner : exercices n°21 à 26 page 249. Exercices n°54 à 61 page 252.