

CHAPITRE : PRIMITIVES.**I) Dérivée de fonctions composées**1°) Dérivée de u^n :

théorème :

Soit n un nombre entier positif;
 Soit u une fonction dérivable sur I ;
 Si $f(x) = [u(x)]^n$, alors $f'(x) = n[u(x)]^{n-1} u'(x)$.

De façon plus condensée : $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ **Exercice n°1** : Déterminer la fonction dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g : t \mapsto (3t+1)^5$

Pour s'entraîner : exercices n°2 et 3 page 222 et exercices n° 32 à 34 page 225.

2°) Dérivée de $\sqrt{u}$:

Si u est dérivable et strictement positive sur un intervalle I , alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Exercice n°2 : Déterminer la fonction dérivée de la fonction g définie sur $[-\frac{1}{3}; +\infty[$ par $g : t \mapsto \sqrt{3t+1}$.

Pour s'entraîner : exercices n° 4 à 6 page 222 et exercices n°35 page 225.

II) Primitives d'une fonction

1°) Activité d'approche : voir TD n°.....

2°) Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .**Une fonction F dérivable sur I est une primitive de f si pour tout x de I ,****Exercice n°3** : Soit F_0 et f deux fonctions définies sur $I =]-\frac{3}{4}; +\infty[$ respectivement par : $F_0(x) = \frac{2x-1}{4x+3}$ et $f(x) = \frac{10}{(4x+3)^2}$.Démontrer que F_0 est une primitive de f sur I .3°) Théorème 1 (admis) : **toute fonction dérivable sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle.****Exercice n°4** : On considère deux fonctions f et g : $f : x \mapsto 3$ définie sur $\mathbb{R}$ $g : x \mapsto \frac{-1}{x^2}$ définie sur $]0, +\infty[$

a) Expliquer pourquoi ces deux fonctions admettent des primitives sur leur intervalle de définition.

b) En consultant le tableau des dérivées, trouver une primitive de f sur $\mathbb{R}$ et une primitive de g sur $]0, +\infty[$ c) En déduire toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$ et toutes les primitives de g sur $]0, +\infty[$.d) Quelle est la primitive F_0 de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F_0(-1) = 5$? Quelle est la primitive G_0 de g sur $]0, +\infty[$ telle que $G_0(3) = -2$?

4°) Théorème 2 :

Soit F une primitive de la fonction f sur un intervalle I .**Les autres primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par : $x \mapsto F(x) + C$, où C est une constante.**Exemple : les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 3$ sont les fonctions $x \mapsto x^3 - 3x + C$ où C est une constante réelle.**III) Recherche de primitives**

1°) Tableau de primitives des fonctions usuelles :

La fonction f est définie par	a	x	x^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\cos x$	$\sin x$
Sur	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$] -\infty, 0 [$ ou $] 0, +\infty [$	$] 0, +\infty [$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Les primitives F de f sont définies par							

Exercice n°5 : Dans chacun des cas déterminer une primitive F de la fonction f définie sur I .a) $f(x) = x^3$, $I = \mathbb{R}$ b) $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $I =]0, +\infty[$ c) $f(x) = 2$, $I = \mathbb{R}$

CHAPITRE : PRIMITIVES.

2°) Opérations sur les primitives :

a) Produit par une constante :Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et k une constante réelle.Si F est une primitive sur I de f , alors kF est une primitive sur I de kf .**Exercice n°6** : Dans chacun des cas suivants déterminer une primitive F de la fonction f définie sur I .

$$f(x) = \frac{x^4}{3}, \quad I = \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{3}{x^2}, \quad I =]-\infty, 0[\qquad f(x) = 4\sin x, \quad I = \mathbb{R}.$$

b) Somme de deux fonctions :Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.Si F est une primitive sur I de f , et si G est une primitive sur I de g alors $F + G$ est une primitive sur I de $f + g$.**Exercice n°7** : Dans chacun des cas suivants déterminer une primitive F de la fonction f définie sur I .

$$f(x) = 1 + x + x^2 \quad I = \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 9x - 6 \quad I = \mathbb{R}, \quad f(x) = 5x^3 - \frac{7}{x^2} \quad \text{sur }]-\infty, 0[\quad \text{déterminer la primitive telle que } F(-1) = 1.$$

3°) Primitives de certains produits et de certains quotients : soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .a) Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I .On sait que $(u^2)' = 2uu'$, donc une primitive d'une fonction de la forme uu' est $\frac{1}{2}u^2$.On sait que $(u^3)' = 3u^2u'$, donc une primitive d'une fonction de la forme u^2u' est $\frac{1}{3}u^3$.

Théorème 3 :

Soit u une fonction dérivable sur I . Pour tout réel α différent de -1 , la fonction $u'u^\alpha$ a pour primitives sur I : $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$

Exercice n°8 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x - 12)(x^2 - 8x - 2)^5$.Déterminer une fonction u et un réel k tels que $f(x)$ s'écrive sous la forme : $f(x) = k \times u'(x) \times [u(x)]^3$ Déterminer la primitive F de f qui vérifie $F(0) = 0$.**Exercice n°9** : Dans chacun des cas déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = x(x^2 + 1)^2; \qquad f(x) = (3x + 1)^2 \qquad f(x) = (2x + 3)(x^2 + 3x + 4) \qquad f(x) = (4x - 3)^3$$

b) On sait que, si u ne s'annule pas sur I , $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

Donc une primitive d'une fonction de la forme $-\frac{u'}{u^2}$ est $\frac{1}{u}$. Autrement dit une primitive de $\frac{u'}{u^2}$ est $-\frac{1}{u}$.

Exercice n°10 : Déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $I = [0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{(5x + 1)^2}$ **Exercice n°11** : Soit la fonction définie sur $I =]\frac{1}{4}, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{16x^2 - 8x + 3}{(4x - 1)^2}$ a) Expliquer pourquoi cette fonction admet des primitives sur l'intervalle I .b) Calculer les réels a et b tels que : pour tout x élément de $] \frac{1}{4}, +\infty[$, $f(x) = a + \frac{b}{(4x - 1)^2}$.c) En déduire les primitives de f sur l'intervalle I .