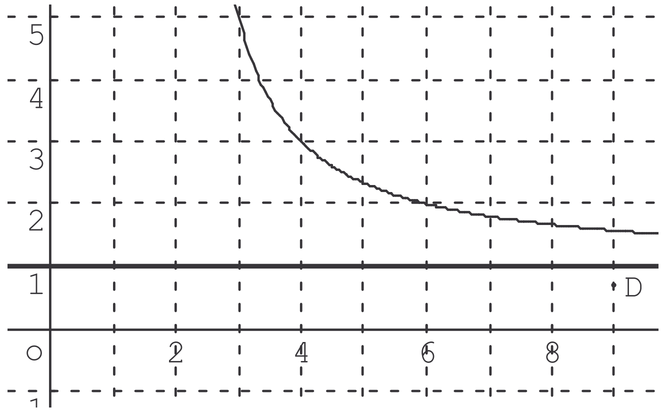
CHAPITRE N°……. : ETUDES DE FONCTIONS ET ASYMPTOTES .

I) Asymptotes parallèles à l'axe des abscisses:

1°) Rappels :
L'axe des abscisses a pour équation : …………………………………………………...

Une droite parallèle à l'axe des abscisses a une équation du type : …………………………………………

2°) ***Exercice n°1*** **:** on a représenté ci-contre une droite D et la courbe représentative C_f d'une fonction f définie sur] 2 , +∞[par
$f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$ dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.



<u>Partie A : lectures graphiques</u> :

a) Une équation de la droite D est d'après le graphique : …………..

b) D'après le graphique $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

On en déduit que la droite D d'équation ….……………..…..

est asymptote ..………………..………………à la courbe

c) Position relative de la courbe C_f et de la droite D sur] 2 , +∞[:

D'après le graphique, la courbe C_f est …………………….…………………………de la droite D.

<u>Partie B : justification des observations graphiques</u>.

a) Déterminer par le calcul $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Le résultat obtenu est-il cohérent avec celui obtenu dans le b) de la partie A?

b) Etudier le signe de f(x) - 1 sur]2 , +∞[. Le résultat obtenu est t-il cohérent avec celui obtenu dans le c) de la partie A ?

3°) Cas général :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ *ou* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a$ **alors la droite d'équation ……………………………………………………………………………………**

à la courbe représentative de f.

Applications :
Exercice n°2 : Soit une fonction f définie sur] 3 , +∞[et soit C sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

4°) Position relative de la courbe par rapport à l'asymptote :

a) Méthode :

pour étudier la position relative entre l'asymptote horizontale D d'équation y = a et la courbe C_f , il suffit d'étudier le signe de f (x) - a :
Si pour tout x d'un intervalle I, f(x) - a > 0 alors C_f est au dessus de D sur I.
Si pour tout x d'un intervalle I, f(x) - a < 0 alors C_f est en dessous de D sur I.

b) Application ***:***

Exercice n°3 : soit la fonction définie sur ℝ par $f(x) = \dfrac{-x^2 - 3x + 5}{x^2 + x + 1}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
a) Déterminez $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la représentation graphique de f ?
b) Etudier le signe de f(x) – (-1). En déduire les positions relatives de C et de la droite D d'équation y = -1.
Vérifier à l'aide de la calculatrice : choisir une fenêtre correcte, faire le tracé de la courbe et de la droite D . Utiliser la touche Zoom ou range pour vérifier l'existence d'un point d'intersection de D et C et pour observer la position relative avant et après ces points.

CHAPITRE N°……. : ETUDES DE FONCTIONS ET ASYMPTOTES .

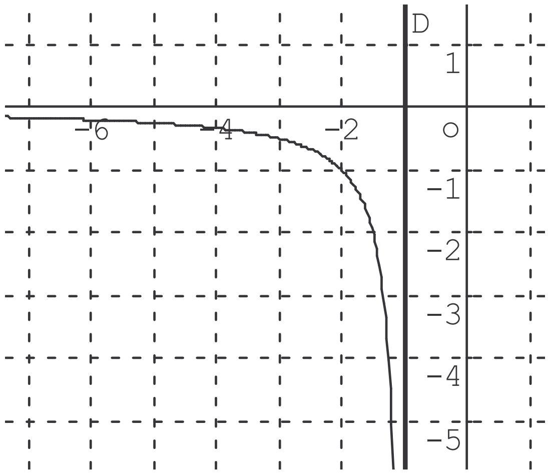
II) Asymptote parallèle à l'axe des ordonnées :

1°) Rappels :

L'axe des ordonnées a pour équation : …………………………………………………...

Une droite parallèle à l'axe des ordonnées a une équation du type : …………………………………………

2°) ***Exercice n°4*** : on a représenté ci-contre une droite D et la représentation C_f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'une fonction f définie sur] -∞ ; -1[par $f(x) = \frac{1}{x+1}$.



a) Une équation de la droite D est d'après le graphique : …………..

b) D'après le graphique $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) =$ ....

On en déduit que la droite D d'équation …………..…   est asymptote

…….…………………….……….à la courbe

c) Justification des observations graphiques.
Déterminer par le calcul $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$.
Le résultat obtenu est t'il cohérent avec le b) ?

3°) Cas général :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ *ou* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ **alors** ………………………………………………………………………………………………………

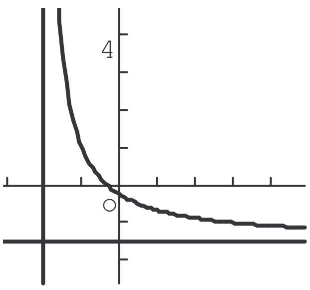
à la courbe représentative de f.

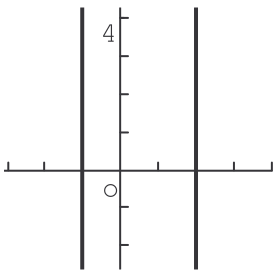
4°) Applications :
Exercice n°5 : Soit une fonction f définie sur] 3 , +∞[et soit C sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.
On sait que $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe C ?

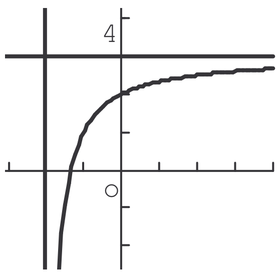
Exercice n°6 : soit la fonction définie sur]-∞, 2[par $f(x) = \frac{3x+4}{x-2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Déterminez $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$. Que peut-on en déduire pour la représentation graphique de f ?
Vérifier à l'aide de la calculatrice.

III) Asymptotes parallèles aux axes : applications

1°) Applications immédiates :
Exercice n°7 : Donner une équation de chaque asymptote aux courbes C_f, C_g, C_h représentées ci-dessous :







CHAPITRE N°……. : ETUDES DE FONCTIONS ET ASYMPTOTES .

***Exercice n°8* : QCM : à chaque question, entourer la bonne réponse.**

	A	B	C	D
1) La courbe de la fonction f définie sur]-∞ ; 2 [par : f(x) = $\frac{1}{4-2x}$ admet une asymptote d'équation :	y = $\frac{1}{4}$	y = 4	x = 2	x = 4
2) La courbe de la fonction f définie sur]0, +∞ [par : f(x) = $\frac{3}{x}$ + 4 admet une asymptote d'équation :	y = $\frac{3}{x}$	y = 4	x = 2	x = 4
3) La courbe de la fonction f définie sur]4, +∞ [par : f(x) = $\frac{1}{4-x}$ admet une asymptote d'équation :	y = $\frac{1}{4}$	y = 4	x = 2	x = 4
4) La courbe de la fonction f définie sur]-∞ ; 0 [par : f(x) = $\frac{5}{x}$ + 4 admet une asymptote d'équation :	x = 4	y = 4	x = 2	y = $\frac{5}{x}$

2°) Exemple d'étude d'une fonction rationnelle dont la courbe représentative admet une asymptote parallèle aux axes

***Exercice n°9* :** Soit f la fonction définie sur]0, +∞[par $f(x)=\frac{2x-1}{x^2}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

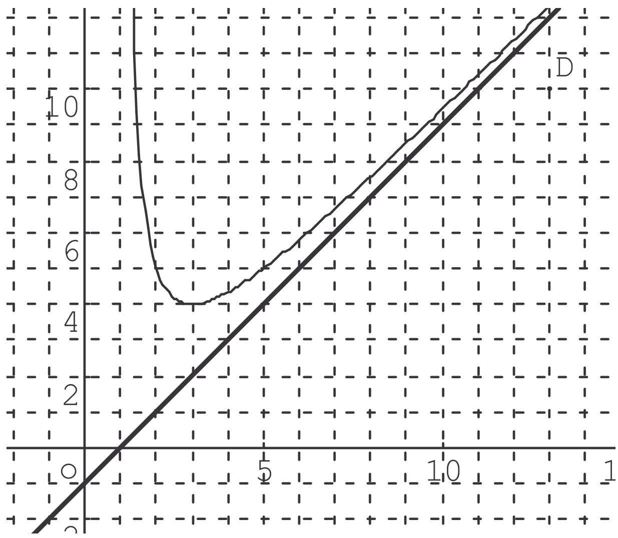
a) Calculer la dérivée f' de f et vérifier que $f'(x)=\frac{-2x^2+2x}{x^4}$

b) Etudier le signe de f'(x) et dresser le tableau de variation de f.
Faire la tracé de la courbe représentative de f sur l 'écran de la calculatrice.
L'allure de la courbe correspond t-elle au tableau de variation ?

c) Calculer les limites de f aux bornes du domaine de définition puis compléter le tableau de variation de f.
En déduire les asymptotes à (C). Vérifier si le résultat obtenu correspond au résultat obtenu avec la calculatrice.
d) Construire la courbe (C) et les deux asymptotes dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1 cm).
Ne pas oublier de recopier le tableau de valeurs qui donne les coordonnées points qui ont permis de tracer la courbe.

IV) Exemple d'étude de fonctions rationnelles dont la courbe représentative admet une asymptote oblique

1°) ***Exercice n°10 :*** on a représenté ci-contre la fonction f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ définie sur]1,+∞[par $f(x)=\frac{x^2-2x+5}{x-1}$ ainsi qu'une droite D.



Partie A : lectures graphiques

a) L'équation de la droite D est : …………………………..

b) $\lim_{x \to -+\infty} f(x)$ = …………………………

c) $\lim_{x \to +\infty} (f(x)-(x-1))$ = …………………………………

d) Le signe de f(x) – (x – 1) est …………………………….

Partie B : justification des observations graphiques.

a) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-1}$ sur]1,+∞[

b) Calculer f(x) – (x – 1) .
c) Déterminer $\lim_{x \to +\infty} (f(x)-(x-1))$

d) En étudiant le signe de f(x) – (x – 1), retrouver le résultat obtenu à la question d) de la partie A.

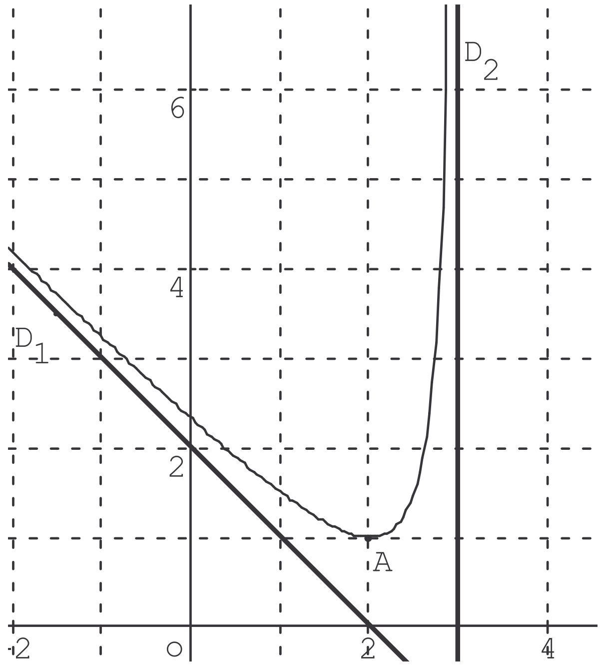
2°) propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle]A , +∞[(respectivement]-∞, A[).

Si $\begin{pmatrix} \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-(ax+b)] = 0 \\ \text{ou respectivement} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)-(ax+b)] = 0 \end{pmatrix}$ **alors la droite d'équation y = ax + b est asymptote oblique à la courbe représentative de f.**

3°) Application :

Exercice n°11 : on a représenté ci-contre dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la fonction f définie sur]-∞,3[par $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-d}$ où a, b, c et d sont des réels que l'on se propose de déterminer.
Les droites D_1 et D_2 sont des asymptotes de la courbe C.
En son point A de coordonnées (2 ; 1), la courbe C admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.



Partie A : lectures graphiques

a) A partir de l'observation du graphique :
donner $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ puis établir le tableau de variation de f.
b) Déterminer graphiquement l'équation de la droite D_1.
En déduire les valeurs de a et b.
c) Sachant que la droite D_2 est asymptote à C et que le point A appartient à C, déterminer d et c.
d) En utilisant les valeurs trouvées précédemment, donner l'expression de f(x).
Vérifier le résultat trouvé à l'aide de votre calculatrice.

Partie B : justification des observations graphiques.

On admet que $f(x) = -x + 2 - \dfrac{1}{x-3}$ sur]-∞, 3[
a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
b) Déterminer f ' et retrouver le tableau de variation de f.
c) Démontrer que la droite d'équation y = - x + 2 est asymptote oblique à la courbe.
d) Etudier la position relative de la courbe et de la droite D.

4°) Position relative de la courbe et de l'asymptote.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si la droite d'équation y = ax + b est asymptote à la courbe représentative de f.
alors la position de la courbe par rapport à son asymptote est déterminé par l'étude du signe de f(x) – (ax +b).

***Exercice n°12* (TP 5 p 193) :** Soit f la fonction définie sur]-0,5; +∞[par $f(x) = \dfrac{2x^2+7x+5}{2x+1}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé
1°) Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout nombre réel x de]-0,5; +∞[, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{2x+1}$
2°) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x+3)]$.
Que peut -on en conclure pour C et la droite D d'équation y = x +3 ?
b) Etudier la positon de la courbe par rapport à l'asymptote oblique.
3°) a) Calculer la limite de f en –0,5. En déduire une asymptote à (C).
b) Calculer la dérivée f' de f et vérifier que $f'(x) = \dfrac{4x^2+4x-3}{(2x+1)^2}$ puis étudier le signe de f'(x) et dresser le tableau de variation de f.
c) Construire la courbe (C) et les deux asymptotes dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1 cm).
Pour s'entraîner : exercice n°21 p198, 52 p 202. exercice n°15 page 196
Pour s'entraîner : exercice n° 39 page 200, 40 page 200, n°43 page 201 (lectures graphiques).