

CHAPITRE N° ...: OPERATIONS SUR LES LIMITES.

I) Produit d'une fonction par une constante :

Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	L	$+\infty$	$-\infty$
Et si $k > 0$ alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} kf(x)$			
Et si $k < 0$ alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} kf(x)$			

Exercice n°1 : a) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = -5x^2$, déterminez $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b) Soit la fonction f définie sur $]-\infty, 0[$ telle que $f(x) = \frac{7}{x}$, déterminez $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -2x$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5x$

II) Somme de deux fonctions :

1°) Cas sans forme indéterminée :

Exercice n°2 :

a) Déterminez $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)]$ dans chacun des cas suivants :

- $f(x) = 2x$ et $g(x) = -\frac{1}{x}$
- $f(x) = -4x$ et $g(x) = -5x^2$
- $f(x) = 2$ et $g(x) = -\frac{1}{x}$
- $f(x) = -3x^2$ et $g(x) = -3$

b) Déterminez $\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x) + g(x)]$ dans chacun des cas suivants :

- $f(x) = 2x$ et $g(x) = -\frac{1}{x}$. Que peut-on dire de l'axe des ordonnées pour la représentation graphique de $f+g$?
- $f(x) = -7$ et $g(x) = \frac{5}{x}$. Que peut-on dire de la droite d'équation $x = 0$ pour la représentation graphique de $f+g$?

2°) Cas avec formes indéterminées :

Exercice n°3 : Dans le cas où l'un des termes tend vers $+\infty$ et l'autre vers $-\infty$ on ne peut pas conclure directement pour la somme (il faut alors effectuer une étude supplémentaire).

Tout est possible suivants les fonctions. On dit que l'on a une **forme indéterminée (FI)**.

a) Quelques exemples très simples pour comprendre cette notion :

$f(x)$	$g(x)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$	On ne peut pas conclure directement pour $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)]$	$f(x)+g(x)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)]$
$2x$	$-x$					
$4x$	$-5x$					
$x+5$	$-x+4$					

b) Peut-on déterminer directement $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + g(x)]$ pour $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$? On verra la méthode ultérieurement.

3°) Tableau récapitulatif :

Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$	m	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x) + g(x)]$						

III) Produit de deux fonctions :

1°) Cas sans forme indéterminée :

Exercice n°4 :

a) Déterminez $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)g(x)]$ dans le cas suivant : $f(x) = -3x^2$ et $g(x) = -x$.

b) Soient les fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = -\frac{1}{x}$ et $g(x) = -5$: déterminez les limites aux bornes du domaine de définition de $f(x) \times g(x)$.

c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) (-3x^2)$.

d) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2 + x$.

CHAPITRE N° ...: OPERATIONS SUR LES LIMITES.

On a vu dans le b) de l'exercice n°3 que l'on ne peut pas déterminer directement $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Transformer l'écriture de $f(x)$ en mettant x^2 en facteur puis calculer la limite comme produit de limites

2°) Cas avec forme indéterminées :

Exercice n°5 : dans le cas où l'un des termes tend vers 0 et l'autre vers $+\infty$ ou $-\infty$ on ne peut pas conclure directement pour le produit (il faut alors effectuer une étude supplémentaire).

Tout est possible suivant les fonctions. On dit que l'on a une **forme indéterminée (FI)**.

Quelques exemples très simples pour comprendre cette notion :

$f(x)$	$g(x)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$	On ne peut pas conclure directement pour $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \times g(x)]$	$f(x) \times g(x)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \times g(x)]$
$\frac{2}{x}$	$-x$					
$\frac{1}{x}$	$-5x^2$					
$\frac{-7}{x}$	$-5x^2$					

3°) Tableau récapitulatif :

Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	L	$L > 0$	$L < 0$	$L > 0$	$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	0
Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$	m	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x)g(x)]$										

IV) Inverse d'une fonction :

Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	L (L non nul)	$+\infty$	$-\infty$	0 avec $f(x) > 0$	0 avec $f(x) < 0$
alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{1}{f(x)}$					

Exercice n°6 : 1°) Déterminez $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^4}$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^3}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4 + 3}$.

2°) Soit f la fonction définie sur $] -\infty, \frac{1}{2} [$ par $f(x) = \frac{1}{1-2x}$.

a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x)$

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Pour s'entraîner à la maison :

Exercice n°6 bis : a) déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + x}$.

b) Soit f la fonction définie sur $]3, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{3-x}$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

V) Quotient de deux fonctions :

1°) Limite d'un quotient en a

a) Un cas sans problème : **exercice n°7 :** Soit la fonction f définie sur $] -2, +\infty [$ par $f(x) = \frac{3x-4}{x+2}$. Déterminer la limite de f en 1.

b) Cas où a est une racine du dénominateur.

Exercice n°8 :

♦ Soit la fonction f définie sur $] -2, +\infty [$ par $f(x) = \frac{3x-4}{x+2}$. Déterminer les limites de f en -2 .

♦ Soit la fonction g définie sur $] -3, 1 [$ par $g(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2x-3}$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -3^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$.

♦ Soit la fonction h définie sur $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$ par $h(x) = \frac{3x^2-4x-5}{1-2x}$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} h(x)$.

CHAPITRE N° ...: OPERATIONS SUR LES LIMITES.

Exercice n°9 : déterminez $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ dans chacun des cas suivants : • $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = -2x + 3$ • $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{2}{x}$

2°) Limites d'un quotient en $+\infty$ ou en $-\infty$: cas sans forme indéterminées.

Exercice n°10 : déterminez $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ dans chacun des cas suivants : a) $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = -2x + 3$ b) $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{-x + 1}$

3°) Tableau récapitulatif : puisque $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$, le cas du quotient se ramène aux cas déjà connus du produit et de l'inverse.

Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	0
Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$	m $m \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0 avec $g(x) > 0$	0 avec $g(x) < 0$	0 avec $g(x) > 0$	0 avec $g(x) < 0$	$+\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]$									

4°) Limites d'un quotient en $+\infty$ ou en $-\infty$: cas avec forme indéterminées.

Exercice n°11 : Dans le cas où les deux termes tendent vers ∞ et dans le cas où les deux termes tendent vers 0, on ne peut pas conclure directement pour le quotient (il faut alors effectuer une étude supplémentaire), Tout est possible suivants les fonctions. On dit que l'on a une **forme indéterminée (FI)**.

a) Quelques exemples très simples pour comprendre cette notion :

f(x)	g(x)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$	On ne peut pas conclure directement pour $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]$	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$
$\frac{2}{x}$	$\frac{3}{x}$					
$\frac{2}{x}$	$\frac{3}{x^2}$					
x	$-5x^2$					
x^3	$-x^2$					

b) Cas général :

Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]$					

c) Soit la fonction f définie sur $] -2, +\infty [$ par $f(x) = \frac{3x - 4}{x + 2}$.

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - 4$ puis $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2$. Peut on conclure directement pour $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$?

Transformer l'écriture de f(x) en mettant x en facteur au dénominateur et au numérateur puis simplifier.

Puis déterminer la limite de f en $+\infty$.

5°) Remarque : il existe d'autres théorèmes sur les limites.

VII) Formes indéterminées : récapitulatif

1°) Produit d'une fonction par une constante : on peut toujours conclure.

2°) Somme de deux fonctions :

Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = +\infty$ et si $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = -\infty$ alors on ne peut pas conclure directement pour $\lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x) + g(x)]$

3°) Produit de deux fonctions :

Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = +\infty$ et si $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0$ alors on ne peut pas conclure directement pour $\lim_{x \rightarrow \alpha} [f(x)g(x)]$

4°) Inverse d'une fonction : on peut toujours conclure

5°) Quotient de deux fonctions :

Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = +\infty$ et si $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = +\infty$ alors on ne peut pas conclure directement pour $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$

Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = 0$ et si $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0$ alors on ne peut pas conclure directement pour $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$.