# CHAPITRE 9 : APPLICATIONS DE LA DÉRIVATION

## I) Ce qu'il faut savoir :

### 1°) Dérivation et sens de variation

Théorème 1 :

**Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de ℝ. Soit J un intervalle inclus dans I.**

**Si, pour tout x de J, f'(x) est strictement positif, alors f est ………………………………………………………… sur J.**

**Si, pour tout x de J, f'(x) est strictement négatif, alors f est ………………………………………………………... sur J.**

**Si, pour tout x de J, f'(x) = 0, alors f est …………………………………….. sur J.**

### 2°) Dérivée et extremums locaux

Théorème 2 :

**Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de ℝ Soit $x_0$ appartenant à I, distinct des extrémités de I.**
**Si la dérivée f' s'annule en changeant de signe en $x_0$, alors cette fonction présente en ce point soit un**

**………………………….. soit un …………………………………**

Rappel : la tangente à la courbe représentative d'une fonction au point correspondant à un maximum ou un minimum

local est ……………………………………………………………………………………….

### 3°) Equation de la tangente au point d'abscisse $x_A$ à la courbe représentative de f.

a) Rappels :

**Si A($x_A$, $y_A$) est un point de la représentation graphique C d'une fonction usuelle f alors $y_A$ = ……………...**

**Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point A d'abscisse $x_A$ est ………………**

b) Propriété :

**Soit A un point de la représentation graphique C d'une fonction usuelle f.**

**L'équation réduite de la tangente en A à C est : …………………………………….**

### 4°) Fonction dérivable et strictement monotone sur [a,b]. Résolution approchée d'équations de la forme f(x) = 0

Théorème 3 :

**Si f est dérivable et strictement …………………….sur [a,b] et si f(a) et f(b) sont de ………………………………..,**

**alors l'équation f(x) = 0 admet une solution et une seule dans [a,b].**

## II) Fonctions polynômes du second degré.

### 1°) Signe de ax + b, rappel.

Théorème :
Lorsque a $\neq 0$, la droite D représentant la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ traverse l'axe des abscisses au point d'abscisse $-\frac{b}{a}$.

Le signe de ax+ b est donné par le tableau ci-dessous :

| x | $-\infty$ | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| **Signe de a**x+b | signe de –**a** | 0 | signe de **a** |

### 2°) Application : *exercice n° 1.* Soit la fonction f définie sur ℝ par f(x) = - 3x$^2$ +2x -1

a) Soit f ' la fonction dérivée de f. Calculer f '(x).

b) Déterminer le signe de f'(x) suivant les valeurs de x.
c) En déduire le sens de variation de f.
d) Dresser le tableau de variation de f ( vérifier les résultats obtenus à l'aide de la calculatrice).

**III) Fonctions polynômes du troisième degré.**

**1°) Signe d'un polynôme du second degré rappel :**

**Théorème 4** :

**Soit f le polynôme défini sur ℝ par f(x) = a$x^2$ + bx + c où a ≠ 0. Soit Δ= $b^2$ - 4ac le discriminant de a$x^2$ + bx + c**
**a) Si Δ > 0, alors l'équation f(x) = 0 admet deux solutions distinctes :** $x' =$ ...................... **et** $x'' =$ ........................

**et f(x) peut se factoriser : f(x) = ................................................**

**De plus, f(x) est du signe de …….. "à l'extérieur" des racines x' et x" et du signe de ………… "à l'intérieur".**

**b) Si Δ = 0, alors l'équation f(x) = 0 admet une solution double :** $x_0 =$ .........

**et f(x) peut se factoriser : f(x) = ....................................**

**De plus, f(x) est du signe de ……….. pour tout réel différent de** $\frac{-b}{2a}$

**c) Si Δ < 0, alors l'équation n'a pas de solution réelle et f(x) ne peut pas s'écrire sous forme de produit de facteurs du premier degré. De plus f(x) est du signe de ………… pour tout x réel**

**2°) Applications :**
*Exercice n° 2 :* Soit la fonction f définie sur ℝ par f(x) = $x^3$ -3 $x^2$ +1
a) Calculer sa fonction dérivée.
b) Étudier le signe de f'(x) en fonction de x.
c) En déduire le tableau de variation de f. (vérifier les résultats obtenus à l'aide de la calculatrice).

*Exercice n° 3 :* Soit l'équation $x^3$ + 2x + 1 =0. Nous ne savons pas la résoudre algébriquement.
On se propose de démontrer qu'il existe une solution unique $\alpha$ dans ] –1 , 0 [
Soit la fonction définie sur [ -1 , 0 ] par f(x) = $x^3$ + 2x + 1 et soit (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$, unités : 10 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 5 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.
a) Étudier les variations de f sur [ -1 , 0 ] c'est à dire :
Calculer sa dérivée f'(x). Déterminer le signe de la dérivée. Faire le tableau de variation de f.
b) Démontrer que l'équation f(x) = 0 admet une seule solution $\alpha$ dans [-1,0].
c) Compléter le tableau de valeurs suivant dans lequel chaque valeur approchée sera donnée à $10^{-2}$ près.

| x | -1 | -0,9 | -0,8 | -0,7 | -0,6 | -0,5 | -0,4 | -0,3 | -0,2 | -0,1 | 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | | | | | | | | | | | |

d) Utiliser le tableau du 3°) pour donner un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-1}$
e) Construire la courbe (C ). Placer le point A de C d'abscisse $\alpha$ sur la figure.

*Pour s'entraîner : exercice n°TP 3 1°)2°) 4°) p 142, n°77 p 153, 86 à, 88 page 154.*

**IV) Fonction rationnelle.**

1°) Signe d'un quotient rappel :

Pour déterminer le signe d'un quotient de deux fonctions, il suffit :
-de chercher le signe de chaque fonction,
-de repérer la ou les valeurs interdites si elle(s) existe(nt).
-d'établir un tableau de signes en appliquant la règle des signes.

2°) Applications : *exercice n°4* . Soit la fonction définie sur ℝ par $f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 1}{x^2 - 2x + 5}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité : 1 cm). Démontrer que $f'(x) = \frac{-9(x^2 - 2x - 3)}{\left(x^2 - 2x + 5\right)^2}$ puis étudier les variations de f.

*Pour s'entraîner : TP 2 p 142, exercice n°24 p 147, 79 p 153.*