CHAPITRE N°7 : FONCTIONS DERIVEES ET REGLES DE DERIVATION. REVISIONS.

I) Fonctions dérivées des fonctions usuelles

	f(x)	f'(x)	f est définie sur	f' est définie sur
Fonction constante	k		ℝ	ℝ
Fonction identité	x		ℝ	ℝ
Fonction affine	mx + p		ℝ	ℝ
Fonction carré	x^2		ℝ	ℝ
Fonction cube	x^3		ℝ	ℝ
Fonction puissance	$x^n \quad (x \in N^*)$		ℝ	ℝ
Fonction inverse	$\frac{1}{x}$		ℝ*	ℝ*
Fonction cosinus	cos x		ℝ	ℝ
Fonction sinus	sinx		ℝ	ℝ
Fonction racine carrée	$\sqrt{x}$		$ℝ^+$	$ℝ^{+*}$

II) Opérations sur les fonctions dérivables

u et v sont deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I

1°) Somme de fonctions dérivables : on admet que **u + v est dérivable sur I et (u + v)' = ………..……………**

2°) Produit d'une fonction dérivable par une constante k : on admet que **ku est dérivable sur I et (ku)' = ………..……**

3°) Produit de deux fonctions dérivables : on admet que **uv est dérivable sur I et (uv)' = …………………………………**

4°) Dérivée de u^2 : **$(u^2)'$ =** ………………………………..

5°) Inverse d'une fonction dérivable : on démontre que si pour tout x de I on a v(x) ≠ 0, alors :
f = $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{v}\right)' =$ **………………………………**

6°) Quotient de deux fonctions dérivables :
si pour tout x de I on a v(x) ≠ 0, alors $\frac{u}{v}$ **est dérivable sur I et** $\left(\frac{u}{v}\right)' =$ **…………………………………………………**

7°) Dérivée de u^n : **$(u^n)'$ =** ………………………………..

III) Nombre dérivé et tangente :

Soit f une fonction dérivable en a.
La courbe représentative de f admet au point A d'abscisse a, une tangente qui a pour :

- coefficient directeur : …………………………………………….............……………………………..

- équation : …………………………………………………………...........…………………………………..

IV) Exercices d'application :

1°) Savoir manipuler des fonctions de référence.
Exercice n°1: calculer f '(x) où f 'est la dérivée de la fonction f définie sur ℝ dans les cas suivants :
f(x) = 2 ; f(x) =2x ; f(x) = -3x+7 ; f(x) = x^4

CHAPITRE N°7 : FONCTIONS DERIVEES ET REGLES DE DER IVATION. REVISIONS.

2°) Produit d'une fonction par une constante

a) Dériver une fonction f(x) =ku(x)

Exercice n°2 : déterminer les fonctions dérivées de ♦ f(x) = 3x sur ℝ ♦g(x) = $-5x^2$ sur ℝ ♦h(x) = $2x^7$ sur ℝ

♦j(x) = $\frac{-2}{x}$ sur ℝ* ♦k(x) = $\frac{3}{2}x^3$ sur ℝ. ♦l(x) = $\frac{x^4}{2}$ sur ℝ.

b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction f au point d'abscisse a :

Exercice n°3 *:* soit la fonction f définie et dérivable sur ℝ par f(x) = $4x^3$.

♦Calculer f '(3).

♦Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3.

♦ Vérifier à l'aide de la calculatrice.

3°) Somme de fonctions dérivables

Exercice n°4 : savoir dériver une somme

a) Déterminer les fonctions dérivées de f(x) = $x+\frac{1}{x}$ sur ℝ* ; g(x) = x^2 + 6 sur ℝ ; h(x) = $\sqrt{x}+x^2$ sur]0, +∞[.

l(x) = $x^5 + x^4$ sur ℝ .

b) Déterminer les fonctions dérivées de i(x) = $8x^5-4x^3+7x^2-5x+2$ j(x) = $\frac{3}{2}(x^2+\frac{1}{x})$ sur ℝ*. l(x)=$\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{4}+7$

Pour s'entraîner : exercice n°1 à 3 p 145, 9 p 1 45.

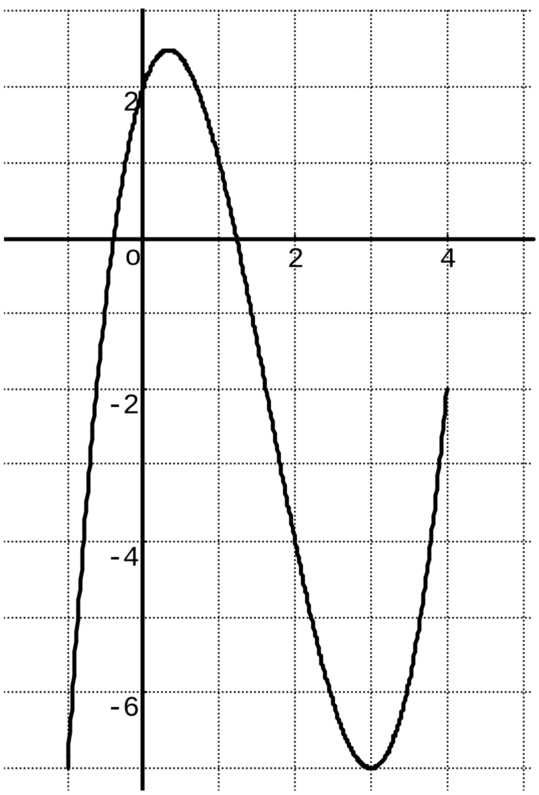
Pour s'entraîner : exercice n°37 à 41 p 150.

4°) Déterminer une équation de tangente à la courbe C de f au point d'abscisse a :

Exercice n°5 : exercice n°17 page 146.

Pour s'entraîner n°18 p 146, 66 et 67 p 151.

Exercice n°6 : le plan est muni d'un repère orthogonal. La courbe ci contre est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle [-1 , 4].



a) Compléter le tableau de valeurs à l'aide de la figure.

x	-1	0	1	2
f(x)				

b) On suppose que f est définie sur [-1 , 3] par f(x) = $ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c et d sont quatre constantes réelles.

Déduire du a) des équations dont a, b, c et d sont solutions.

Calculer a, b, c et d.

c) f(x) = $x^3 - 5x^2 + 3x + 2$

♦Déterminer par le calcul une équation de la tangente T_1 à la courbe au point A (0, 2). La tracer.

♦Déterminer par le calcul une équation de la tangente T_2 à la courbe au point B d'abscisse 1. La tracer.

♦Déterminer par le calcul une équation de la tangente T_3 à la courbe au point D (3, f(3)). La tracer.

♦Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites T_1 et T_2

d) Etudier la position relative de la courbe et de la tangente T_1

5°) Produit de deux fonctions dérivables :

Exercice n°7 *:* déterminer les fonctions dérivées de

a) f(x) = $(x^2-1)(3x-2)$ sur ℝ b) g(x) =$(3x^2-2x+1)(x-2)$ sur ℝ.

c) h(x) = (5x+4) sinx d) i(x) = $(5-x)\sqrt{x}$.

6°) Dérivée de u^2.

Exercice n°8 : déterminer les fonctions dérivées de a) f(x) = $(1-2x)^2$ sur ℝ, b) h(x) = $(4x-1)(3x+2)^2$ sur ℝ.

Pour s'entraîner : exercice n°4 à6 p 145, 42 et 44 p 150, 14 à 16 p 146, 63 à 65 p151.

7°) Dérivée de u^n.

Exercice n°9 *:* déterminer les fonctions dérivées de a) f(x) = $(1-2x)^4$ sur ℝ, b) g(x) = $(3x^2+2)^3$ sur ℝ.

Pour s'entraîner : exercices n°1 p 222, 33 p 225.

CHAPITRE N°7 : FONCTIONS DERIVEES ET REGLES DE DERIVATION. REVISIONS.

8°) Inverse d'une fonction dérivable.

Exercice n°10 *:* déterminer les fonctions dérivées de :

a) $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$ sur $]\dfrac{1}{2},+\infty[$, b) $g(x) = \dfrac{1}{(3x^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$. c) $h(x) = \dfrac{-50}{3x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Pour s'entraîner : exercices n°10 à 12 p 205, exercices n°47 à 55 p 209.

9°) Quotient de deux fonctions dérivables :

Exercice n°11 : déterminer les fonctions dérivées de : $f(x) = \dfrac{1-2x}{3x+2}$ sur $]\dfrac{-2}{3},+\infty[$, $g(x) = \dfrac{5x^2+4}{2x^2-3x+1}$ sur $]1,+\infty[$.

Pour s'entraîner : exercices n°13 à 17 p 205, exercices n°56 à61 p 209.

10°) Dérivée de $\sqrt{u}$:

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et

$$\boxed{\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$$

Exercice n°12 : déterminer la fonctions dérivée de $f(x) = \sqrt{3x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$, P*our s'entraîner : exercices n°70 à 72 p 209.*

11°) ***Exercice n°13*** : Déterminer la fonction dérivée f ' de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x)=\dfrac{-5}{4-6x}+5x+2$ sur $\left]\dfrac{2}{3},+\infty\right[$

b) $f(x) = \dfrac{x^6}{4} - \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x}{3} + 1$ sur $\mathbb{R}$

c) $f(x) = (3x-4)\cos x$ sur $\mathbb{R}$

d) $f(x) = \dfrac{(2x-3)^2}{x-1}$ sur $]1 , +\infty[$

V) Dérivée de $t \mapsto f(at+b)$; a et b réels

1°) On admet le théorème suivant :

si f est dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et si pour tout t d'un intervalle J, at+b est élément de I, alors la fonction g : $t \mapsto f(at+b)$ est dérivable sur J et g'(t) = af'(at + b).

2°) Application :

Exercice n°14 **:** u est la fonction définie sur [-4, 0] par u(t) = 1 – 2t

a) Tracez la courbe représentative de u. Déterminez l'image par u de l'intervalle [-4, 0].

b) α , g et h sont les fonctions respectivement définies sur [-4, 0] par :

$$\alpha(t) = (1-2t)^3 \qquad g(t) = \frac{1}{1-2t} \qquad h(t) = \sqrt{1-2t}$$

Démontrez que ces fonctions sont de la forme $t \mapsto f(at+b)$..

Dans chacun des cas, précisez f, a, b.

Démontrez que les fonctions α , g et h sont dérivables sur [-4, 0] et déterminez leurs fonctions dérivées.

Exercice n°15 : a) Déterminer la fonction dérivée de la fonction g définie sur $[-\dfrac{1}{3};+\infty[$ par g : $t \mapsto \sqrt{3t+1}$.

b) Déterminer la fonction dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par g : $t \mapsto \sin\left(2t+\dfrac{\pi}{4}\right)$

8°) Dérivée de cos (ωt+φ) et dérivée de sin (ωt+φ) :

Les fonctions $t \mapsto \cos(\omega t+\varphi)$ **et** $t \mapsto \sin(\omega t+\varphi)$ **sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et**

Fonction	dérivée
$\cos(\omega t+\varphi)$	$-\omega\sin(\omega t+\varphi)$
$\sin(\omega t+\varphi)$	$\omega\cos(\omega t+\varphi)$

Exercice n°16 : déterminer les fonctions dérivées de

a) $f(t)=\cos\left(-4t+\dfrac{\pi}{2}\right)$ b) $g(t)=\sin\left(-4t+\dfrac{\pi}{2}\right)$ c) $h(t)=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+3t\right)$

d) f(x) = xsin2x e) g(t) = cos(6t) g) h(t)= $\sin^2(2t)$ h) $i(x) = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}-4x\right)$ i) $j(x) = \sin^2\left(\dfrac{\pi}{5}-2x\right)$

Pour s'entraîner exercice n°33 page 149 et exercices n°61, 62, 63, 64, 65 page 151.