NOMBRES COMPLEXES : BAC STL 1999

Enoncé : On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes, en donnant les solutions sous forme algébrique :
a) $z^2 + z + 1 = 0$.
b) $2z - i\bar{z} = 6 - 6i$ où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z.

2. On considère les deux nombres complexes : $z_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = 2 - 2i$.

a) Calculer le produit z_1z_2 sous forme algébrique.
b) Calculer le module et un argument, appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$ des nombres complexes z_1, z_2 et z_1z_2.
c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

Correction :

1) a) $z^2+z+1 = 0$.

Soit Δ le discriminant de cette équation : $\Delta = 1-4 = -3$.

$\Delta < 0$ donc $\boxed{\text{l'équation } z^2+z+1 = 0 \text{ admet deux solutions complexes : } z_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}}$

b) $2z - i\bar{z} = 6 - 6i$:
Posons $z = x+iy$ où x et y sont des réels à déterminer, on a donc $\bar{z} = x - iy$.
D'où : $2(x+iy) - i(x-iy) = 6 - 6i$.
C'est à dire : $2x+2iy-ix+i^2y=6-6i$.
Soit $(2x-y) + i(2y-x) = 6 - 6i$.

Propriété : $\boxed{\text{deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire}}$

On obtient donc le système suivant : $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ 2y - x = -6 \end{cases}$.

Soit $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ -x + 2y = -6 \end{cases}$. C'est à dire $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ -2x + 4y = -12 \end{cases}$

En ajoutant les deux équations membres à membres, on obtient : $3y = -6$ donc $y = -2$.
On remplace y par -2 dans $-x + 2y = -6$ donc $-x + (-4) = -6$.
Soit $-x = -2$. C'est à dire $x = 2$. Donc $x = 2$ et $y = -2$.

$\boxed{\text{Conclusion : la solution de l'équation } 2z - i\bar{z} = 6 - 6i \text{ est donc : } z = 2-2i}$.

2. a) $z_1z_2 = \left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)(2-2i) = \left(-1+i\sqrt{3}\right)\left(\dfrac{2-2i}{2}\right) = \left(-1+i\sqrt{3}\right)(1-i) = -1+i+i\sqrt{3} - i^2\sqrt{3} = \left(-1+\sqrt{3}\right)+i\left(\sqrt{3}+1\right)$.

$\boxed{\text{La forme algébrique de } z_1z_2 \text{ est } \left(-1+\sqrt{3}\right)+i\left(\sqrt{3}+1\right)}$

$z_1 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ donc $|z_1| = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}} = \sqrt{\dfrac{4}{4}} = 1$.

Soit θ_1 un argument de z_1 : $\cos\theta_1 = \dfrac{-\frac{1}{2}}{1} = -\dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta_1 = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $\theta_1 = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

$\boxed{\text{La forme trigonométrique de } z_1 \text{ est } 1\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)}$

Conclusion : $\boxed{|z_1| = 1,\ \arg(z_1) = \dfrac{2\pi}{3} \text{ et } z_1 = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)}$.

$z_2 = 2 - 2i$ donc $|z_2| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Conclusion : $\boxed{|z_2| = 2\sqrt{2}}$

Soit θ_2 un argument de z_2 : $\cos\theta_2 = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta_2 = -\dfrac{2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $\boxed{\theta_2 = -\dfrac{\pi}{4}}$

NOMBRES COMPLEXES : BAC STL 1999

La forme trigonométrique de z_2 est $\boxed{2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$

d'où $\boxed{\left|z_2\right|=2\sqrt{2}\ ,\ \ \arg(z_2)=-\frac{\pi}{4} \text{ et } z_2=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$.

$\left|z_1z_2\right|=\left|z_1\right|\left|z_2\right|=1\times2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$. $\arg(z_1z_2)=\arg(z_1)+\arg(z_2)+2k\pi=\frac{2\pi}{3}+\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi=\frac{5\pi}{12}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Conclusion : la forme trigonométrique de $\boxed{z_1z_2=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)=2\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12}+i\times2\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12}}$

c) D'après les questions 2 a) et 2 b) :

La forme algébrique de z_1z_2 est $z_1z_2=\left(\sqrt{3}-1\right)+i\times\left(\sqrt{3}+1\right)$

La forme trigonométrique de z_1z_2 est $z_1z_2=2\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{12}+i\times2\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{12}$.

Propriété :

$\boxed{\text{Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et parties imaginaires sont égales}}$.

Donc $2\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\sqrt{3}-1$ et $2\sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\sqrt{3}+1$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{3}\times\sqrt{2}-1\times\sqrt{2}\right)}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\times2}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{3}\times\sqrt{2}+1\times\sqrt{2}\right)}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2\times2}$$

Conclusion : $\boxed{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$ et $\boxed{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$.

Exercice classique, faisant intervenir des formes algébriques et trigonométriques pour trouver des valeurs exactes d'un cosinus et d'un sinus d'un angle (ici $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$*).*

Il est possible de retrouver ces résultats par d'autres méthodes n'utilisant pas les complexes.