CHAPITRE N°…… : PROBABILITÉS

I) Définition

1°) Exemple

On a effectué une série de lancers successifs d'un dé et on a noté au bout de 10, 50, … 200 lancers le nombre d'apparitions du chiffre 2. Les résultats obtenus sont rassemblés dans le tableau suivant :

Nombre de lancers	10	50	100	500	1000	2000
Nombre d'apparitions du 2	3	6	14	85	162	336
Fréquence d'apparitions du 2	0,300	0,120	0,140	0,170	0,162	0,168

Dans la dernière ligne du tableau, on a noté les fréquences d'apparition du chiffre 2.
Lorsque nous jetons un dé bien équilibré, nous savons intuitivement que nous avons 1 chance sur 6 de sortir le chiffre 2, ce qui représente une fréquence théorique de $\frac{1}{6} \approx 0{,}167$.
L'expérience décrite ci-dessus montre que plus le nombre de lancers est grand, plus la fréquence d'apparition du chiffre 2 est proche de $\frac{1}{6}$. Nous dirons que $\frac{1}{6}$ est la probabilité d'obtenir le chiffre 2.
La définition suivante met en forme cette nouvelle notion.

2°) Définition :

La probabilité d'un événement indique si cet événement a plus ou moins de chances de se produire.

- Une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1.
- La somme des probabilités de tous les événements élémentaires est égale à 1.
- la probabilité d'un événement A, notée p(A), est la somme des probabilités des événements élémentaires qui constituent A.

3°) Exemple :
Pour un dé bien équilibré, il y a 6 événements élémentaires qui ont tous la même probabilité.
Puisque la somme de leurs probabilités vaut 1, chacun a pour probabilité $\frac{1}{6}$.
Si A est l'événement : " le numéro sorti est pair", les événements élémentaires qui constituent A sont $\{2\}, \{4\}\ et\ \{6\}$.
On a p(A) = $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$.

Exercice n°1 : Un dé a été truqué de telle sorte que la probabilité de sortie du 6 soit le double de celle du 5, et celle du 5 le double de celle du 1. On suppose que le 1, le 2, le 3, et le 4 ont la même probabilité de sortie.
a) Calculer la probabilité de sortie de chaque numéro.
b) Calculer la probabilité de l'événement A : " obtenir un numéro au moins égal à 5".

4°) Propriétés : **p(Ω) = 1**
p(∅) = 0

II) Équiprobabilité et dénombrement

1°) Définition :
Dans certaines situations, tous les événements élémentaires ont la même probabilité de se produire (par exemple, si on lance un dé bien équilibré, chaque face a la probabilité $\frac{1}{6}$ de sortir).
On dit alors qu'il y a **équiprobabilité**.
Dans ce cas, si on désigne par n le nombre d'événements élémentaires, la probabilité de chaque événement élémentaire vaut
$\frac{1}{n}\ ou\ \frac{1}{nombre\ d'\ éléments\ de\ \Omega}$.

2°) **Théorème** :

Si les événements élémentaires constituant un univers Ω fini sont équiprobables, la probabilité d'un événement A est :
$$p(A)=\frac{nombre\ d'\ éléments\ de\ A}{nombre\ d'\ éléments\ de\ \Omega}=\frac{nombre\ de\ résultats\ \ favorables\ à\ la\ réalisation\ de\ A}{nombre\ de\ résultats\ \ possibles}$$

3°) Applications :

En situation d'équiprobabilité, il faut trouver le nombre de cas possibles et le nombre de cas favorables. On sera souvent amené à employer l'une des techniques utilisées dans les exercices ci-dessous.

Exercice n°2 : **Comptage direct** (on compte directement le nombre de cas possibles et le nombre de cas favorables)
a) D'un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard. Soit A l'événement " Obtenir une dame ", B l'événement " Obtenir un nombre pair ". Déterminer la probabilité de A, de B. En déduire la probabilité de l'événement " Obtenir une dame ou un nombre pair ".

b)Dans un sac on met les lettres du mot EMPLOI. On tire au hasard une lettre du sac. Quelle est la probabilité de l'événement A "Obtenir une voyelle" ?

Exercice n°3 : **Diagramme de Venn** (on s'appuie sur les représentations d'ensembles sous forme de "patates").
Dans une classe de 30 élèves, il y a 8 élèves faisant du basket et 12 du football dont 3 font aussi du basket. On choisit au hasard un élève de la classe. Quelle est la probabilité de l'événement A "Cet élève ne pratique qu'un seul de ces deux sports" ?

Exercice n°4 : **Tableau** (organiser les résultats dans un tableau à double entrée)
On lance deux fois un dé équilibré à quatre faces numérotées de 1 à 4.
Quel est l'ensemble Ω des éventualités ?
Quelle est la probabilité de l'événement A "Obtenir une somme strictement inférieure à 6 " ?

Exercice n°5 : **Arbre de choix** (illustrer de façon simple les différents choix possibles à l'aide de branches).
On lance une pièce de monnaie équilibrée 3 fois de suite et l'on note, à chaque lancer, P si l'on obtient pile et F si l'on obtient face.
Quelle est la probabilité de l'événement A "Obtenir au moins deux fois P ".

III) Réunions et intersections d'événements.

1°) Cas d'évènements disjoints(ou incompatibles) :
Exercice n°6 *:* Deux joueurs jouent au dés. L'un d'eux lance deux fois le dé. Il gagne si la somme des numéros sortis est inférieure ou égale à 5 ou si elle est égale à 7. On veut déterminer la probabilité qu'a ce joueur de gagner.

a) Donner tous les résultats possibles en remplissant le tableau suivant :

2^e coup / 1er coup	1	2	3	4	5	6
1		3				
2						
3						
4						
5						
6						

b) Soit A l'événement « La somme des résultats est inférieure ou égale à 5 ». Soit B l'événement « La somme des résultats est 7 ». Les évènements A et B sont-ils incompatibles ? Déterminer P(A) et P(B) puis P($A \cup B$). En déduire la probabilité qu'a le joueur de gagner.

2°) Cas d'évènements non disjoints :
Exercice n°7 *:*
D'un jeu de 32 cartes, on tire une carte au hasard. Soit A l'événement " Obtenir une dame ", B l'événement " Obtenir un coeur ".
Déterminer la probabilité de A, de B, de $A \cap B$ puis de $A \cup B$.

3°) Théorème :

On dit que des événements A et B sont incompatibles quand ils ne peuvent pas se produire en même temps.
Si deux événements A et B sont incompatibles, on a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Dans le cas général, les événements A et B peuvent se produire simultanément.
On note $A \cap B$ (on dit "A inter B") l'événement : "A et B se produisent simultanément".
On a alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

IV) Evénement contraire.

1°) ***Exercice n°8*** : jeu de dés
Deux dés cubiques de couleurs différentes, un vert et un rouge, ont leurs six faces numérotées respectivement 1, 2, 3, 4, 5, 6.
On lance simultanément les deux dés et on note le chiffre marqué sur la face supérieure de chacun des dés. Un résultat est un couple (a,b) de deux nombres donnant dans l'ordre (dé vert, dé rouge) le nombre de points obtenus avec chaque dé.

a) Donner tous les résultats possibles en remplissant le tableau suivant :

Dé rouge / Dé vert	1	2	3	4	5	6
1		(1,2)				
2						
3						
4						
5						
6						

Par exemple, le couple (1, 2) correspond au résultat : "on a obtenu 1 avec le dé vert et 2 avec le dé rouge".
Quel est le nombre de résultats possibles ?
b) Soit A l'événement : « n'obtenir aucun "6". Déterminer P(A)
c) Déterminer la probabilité de l'événement « obtenir au moins un "6" ».

2°) Probabilité de l'événement $\overline{A}$ **:**

L'événement contraire de A, noté $\overline{A}$, est l'ensemble des éventualités qui n'appartiennent pas à A.

Propriété : **Pour tout événement A :** $\mathbf{p(\overline{A}) = 1 - p(A)}$

$\mathbf{p(A) = 1 - p(\overline{A})}$

3°) **Applications :**

Exercice n°9 : Dans une classe de 25 élèves, on dispose des renseignements suivants :

Nombre de frères	0	1	2	3	4
Nombres d'élèves	5	8	7	1	4

On interroge au hasard un élève. Déterminer la probabilité pour qu'il ait au moins un frère (événement A)

Exercice n°10 : Dans un univers U on donne deux événements incompatibles A et B tels que P(A) = 0,2 et P(B) = 0,7.

Calculer $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(\overline{A})$, $P(\overline{B})$.

Exercice n°11 : Dans un univers U on donne deux événements A et B tels que P(A) = 0,3, $P(\overline{B}) = 0,8$, $P(A \cup B) = 0,4$.

Calculer P(B) , $P(A \cap B)$, $P(\overline{A})$,

V) Exercices d'après annales :

Exercice n°12 : (4 pts)BAC STT CG et IG, Antilles-Guyane, juin 1998.
Un sondage effectué auprès de 100 automobilistes ayant effectué un trajet reliant deux villes montre que 60 automobilistes transportent des enfants. Parmi ceux-ci, 85% se sont arrêtés au moins une fois au cours du trajet. Par ailleurs 70% des automobilistes voyageant sans enfant ne se sont pas arrêtés.
On interroge au hasard un automobiliste.
On note A l'événement : " l'automobiliste interrogé s'est arrêté au moins une fois", et E l'événement : " l'automobiliste interrogé transporte des enfants ".
1. (1 pt) Reproduire et compléter le tableau de répartition des effectifs suivant :

	Automobilistes ayant effectué au moins un arrêt	Automobilistes n'ayant effectué aucun arrêt	Cumul
Automobilistes transportant des enfants			60
Automobilistes ne transportant pas d'enfant			
Cumul			100

2. (1,5 pt)Calculer, à 10^{-2} près, les probabilités suivantes : P(A), P(E), $P(A \cap E)$.
3.a. (0,75 pt)On interroge un automobiliste ne transportant pas d'enfant. Calculer la probabilité qu'il se soit arrêté au moins une fois.
b.(0,75 pt) On interroge un automobiliste qui ne s'est pas arrêté. Quelle est la probabilité qu'il ne transporte pas d'enfant.

Exercice n°13 (d'après bac sti gm option b, c, d et e juin 2007)
Une entreprise fabrique des plaquettes de métal. Pour cela elle utilise deux machines, une qui les ajuste en longueur et une autre qui les ajuste en largeur. Les machines sont programmées pour donner des plaquettes de 2,5 cm sur 1,5 cm.
Des erreurs de manipulation peuvent conduire à des dimensions non conformes : une longueur de 2,6 cm au lieu de 2,5 cm ; une largeur de 1,6 cm au lieu de 1,5 cm.
Afin de vérifier la conformité de ces plaquettes, on procède à deux tests : un test sur la longueur et un test sur la largeur. On effectue les deux tests sur 100 plaquettes et on obtient :
- 20 plaquettes ont une longueur de 2,6 cm ;
- 18 plaquettes ont une largeur de 1,6 cm ;
- 5 plaquettes ont une dimension de 2,6 cm sur 1,6 cm.

On prélève au hasard une plaquette parmi les 100. Elles ont donc toutes la même probabilité d'être choisies.

1. Compléter le tableau des effectifs suivant :

	Largeur conforme 1,5	Largeur non conforme 1,6	Total
Longueur conforme 2,5			
Longueur non conforme 2,6		5	20
Total			100

2. a) Quelle est la probabilité qu'une plaquette prélevée au hasard soit conforme à ce que veut l'entreprise ?
   b) Quelle est la probabilité qu'une plaquette prélevée au hasard ait exactement une de ses dimensions non conforme ?

Exercice n°14 (d'après bac sti gm option a juin 200 4)

Une association de randonneurs organise un repas. Elle fixe le prix de la manière suivante :
- le tarif pour un enfant âgé de 10 ans ou moins est de 5 € ;
- le tarif pour un jeune âgé de 11 à 16 ans est de 8 € ;
- dans les autres cas le tarif est de 10 €

De plus, tout membre de l'association bénéficie d'une réduction de 20 % appliquée au tarif le concernant. Ainsi, un membre âgé de 11 à 16ans paiera 6,4 €.
Les participants au repas, au nombre de 600, sont répartis selon le tableau ci-dessous :

Participant	10 ans ou moins	entre 11 et 16 ans	plus de 16ans	total
membre	50	40	110	200
non-membre	110	100	190	400
total	160	140	300	600

On choisit au hasard une personne ayant participé au repas.
1. Quelle est la probabilité qu'elle soit membre de l'association ?
2. Quelle est la probabilité qu'elle paye plus de 7 € ?

Exercice n°15 (4 points) : (d'après bac sti gm option a juin 2005)
Le Comité des fêtes d'un village organise une loterie à l'aide de deux urnes.
L'urne U_1 contient trois boules rouges notées R_1, R_2, R_3 et deux boules jaunes notées J_1 et J_2.
L'urne U_2 contient quatre boules bleues notées B_1, B_2, B_3, B_4 et une boule verte V.
Pour participer à cette loterie, un joueur doit d'abord miser 3 €. Il tire ensuite au hasard une boule dans U_1, puis une boule dans U_2.
Les boules sont indiscernables au toucher. On suppose que tous les tirages de couples de boules sont équiprobables.
1. A l'aide d'un tableau ou d'un arbre, montrer qu'il y a 25 couples de boules possibles.
2. Une boule rouge fait gagner 2 €.
Une boule jaune fait gagner 3 €.
Une boule bleue fait gagner 1 €.
La boule verte fait gagner 5 €.
A chaque tirage de 2 boules la variable aléatoire X associe le gain finalement réalisé par le joueur.
Ainsi, en tenant compte de la mise de 3 €, le tirage d'une boule rouge et d'une boule verte occasionne finalement un gain de 4 €.
a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.
b) Démontrer que $P(X=5) = \frac{2}{25}$.

Exercice 16 : (d'après bac sti 2006 nouvelle calédonie)
Un client d'un supermarché reçoit lors de son passage en caisse un ticket d'un jeu du grattage.
Ce ticket comporte trois cases à gratter.
Pour la première case deux résultats sont possibles I ou 2, pour la deuxième et la troisième case trois résultats sont possibles 1, 2 ou 3.
Le client gratte les trois cases de son ticket.
1. Préciser le nombre de résultats possibles. (0,5 pt)
2. On considère les évènements suivants :
· A : « Avoir 3 chiffres identiques »
· B : « Avoir au moins une fois un 2 ».
a. Déterminer la probabilité de A notée $p(A)$ et celle de B notée $p(B)$. (1 pt)
b. Déterminer $p(A \cap B)$, puis démontrer que $p(A \cup B) = \frac{5}{6}$ (0,75 pt)

Exercice n°17 : d'après Bac ACA, ACC, centres étrangers I, juin 1998 sur 8 points.
Calcul de probabilités élémentaires.

Dans un grand magasin, il y a 120 pantalons à vendre dans les quatre tailles : S, M, L, ou XL et dans les trois coloris : vert, bleu ou rouge. 50% des pantalons sont bleus et 20% des pantalons sont dans la taille S.
En taille S, il y a le même nombre de pantalons dans les trois coloris. Il y a trois fois plus de pantalons dans la taille S que dans la taille XL.En taille XL, il n'y a que des pantalons bleus.
D'autres informations figurent dans le tableau ci-dessous.
1. (4 pts)Recopier et compléter le tableau, après justification des quatre premiers résultats que vous obtenez.

taille colori	S	M	L	XL	total
vert		10			
bleu			20		
rouge		12	15		
Total					120

2. Dans cette question, les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.
a. (3 pts)Un pantalon étant pris au hasard, calculer la probabilité des événements suivants :
A : " le pantalon est vert "
B : " le pantalon est en taille L "
C : " le pantalon est vert, en taille L "
D : " le pantalon est vert ou en taille L".
b.(1 pt)Un pantalon étant pris au hasard parmi ceux de colori vert, quelle est la probabilité pour qu'il soit de taille L ?