CHAPITRE N°……. : NOMBRES COMPLEXES .

I) Introduction

1°) Les ensembles de nombres :

• $\mathbb{N}$ est l'ensemble des ………………………………………………………………

Dans $\mathbb{N}$, l'équation $x + 1 = 0$ ……………………………………………………………..

Cette équation a une solution notée ………. , cette solution est un élément de l'ensemble …………………………

• $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des ……………………………………………………..………………

Dans $\mathbb{Z}$ l'équation $3x = 1$ ……………………………………..…………………………..

Cette équation a une solution notée………………, cette solution est un élément de l'ensemble ……………………

• $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des ……………………………………………………………………… .

C'est l'ensemble de tous les nombres de la forme ………… avec ……….. $\in$ $\mathbb{Z}$ et ………… $\in$ $\mathbb{Z}^*$.

$\mathbb{Q}$ contient $\mathbb{Z}$: On écrit $\mathbb{Z}$ …….. $\mathbb{Q}$ et on lit : …………………………………………...

Dans $\mathbb{Q}$ l'équation $x^2 = 2$ …………………………………………….………………...

Cette équation a deux solutions notées …..…. et …………, ces solutions sont des éléments de l'ensemble ……….…

• $\mathbb{R}$ est l'ensemble des ……………………………………………………….………...

Dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 = -1$ ……………………………………………………………….

2°) Le nombre i :

> On admet l'existence d'un nombre nouveau noté i dont le carré vaut –1. Ainsi $i^2 = -1$.

De plus, son opposé –i a aussi pour carré –1. En effet : $(-i)^2 = (-i)\times(-i) = i^2 = -1$.

l'équation $x^2 = -1$ a deux solutions notées i et -i , ces solutions sont des éléments de l'ensemble $\mathbb{C}$

- $\mathbb{C}$ est l'ensemble des <u>nombres complexes</u>.

On a $\mathbb{N}$ ...... $\mathbb{Z}$ .... $\mathbb{Q}$ ……… $\mathbb{R}$ …………. $\mathbb{C}$.

II) L'ensemble des nombres complexes

1°) Notations. Définition

> On admet l'existence d'un nombre nouveau, noté i, dont le carré est égal à –1.
> $i^2 = -1$
> Un **nombre complexe** est un nombre de la forme a + bi, où a et b sont deux nombres réels.
> Cette écriture est dite **forme algébrique** du nombre complexe.
> Le réel a est la **partie réelle** du nombre complexe et le réel b est sa **partie imaginaire**. On note a = Re(z) et b = Im(z).
> L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

i est la première lettre du mot imaginaire
On note souvent un nombre complexe par la lettre z.

2°) Exemples : $z_1 = 5 - 2i$, $z_2 = -1 + 2i$, $z_3 = -i$, $z_4 = \pi$, $z_5 = 4i - \frac{1}{3}$ sont des nombres complexes. Pour chacun d'eux déterminer leur partie réelle et leur partie imaginaire.

3°) Egalité de deux nombres complexes

a) Théorème :

> **a + ib = a' + ib' si et seulement si a = a' et b = b'**

b) ***Exercice n°1*** : Déterminer les nombres réels x et y tels que (x-2) + (y-1) i = 2 – 3i

4°) Remarques :

a) L'ensemble $\mathbb{R}$ est un sous ensemble de $\mathbb{C}$: en effet tout nombre réel a peut s'écrire a + 0i.

$\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$. On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

b) Si le nombre complexe z = a + bi a une partie réelle nulle, on l'écrit simplement bi à la place de 0 + bi et on dit qu'il s'agit d'un imaginaire pur.

III) Règles de calcul dans $\mathbb{C}$

1°) Théorème admis :

On peut définir dans $\mathbb{C}$ une addition et une multiplication pour lesquelles les règles de calcul sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$ avec $i^2 = -1$

Remarque : le carré de i étant négatif, i n'est pas un nombre réel.

2°) ***Exercice n°2***
On donne z = 2 + 3i et z' = -1 - 2i. Calculer : a) z + z' b) zz' c) z^2 d) z'^3

3°) Puissances entières de i

Exercice n°3 **:** simplifier les puissances de i suivantes :
a) i^3, i^4, i^5, i^6, i^9, i^{11} b) i^{350}, i^{1994}, i^{2000} c) i^{1995} d) i^{333}

IV) Conjugué d'un nombre complexe, inverse d'un nombre complexe non nul

1°) Définition :

Soit le nombre complexe z = a + bi. On appelle conjugué de z, et on note $\bar{z}$, le nombre $\bar{z}$ = a – bi.

Exercice n°4 **:** Donner le conjugué $\bar{z}$ de z des nombres complexes suivants :

a) 1 + 3i b) 5i - 2 c) $\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ d) -3 e) i f) -4i

2°) Propriétés du conjugué

a) Théorème

Soit z = a + bi un nombre complexe : $z\bar{z} = a^2 + b^2$

b) Démonstration : voir cahier de cours.
c) ***Exercice n°5*** : z = 3-5i. Calculer $z\bar{z}$

3°) Inverse d'un nombre complexe :

l'inverse d'un nombre complexe z non nul, noté $\frac{1}{z}$, peut être mis sous la forme a + bi en utilisant le conjugué $\bar{z}$

Exercice n°6 **:** Donner sous forme algébrique les inverses des nombres complexes suivants : a) i b) 11 + 2i
4°) Calcul d'un quotient :

Méthode :
Pour effectuer le quotient de deux nombres complexes, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Exercice n°7 : Mettre sous forme algébrique les quotients suivants : $\frac{1-7i}{4+3i}$ et $\frac{\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{3}i}$.

5°) Equations et systèmes dans $\mathbb{C}$.

Exercice n°8 : a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : (-2 + 3i) z + 1 – 2i = 0

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système d'inconnues z et z' (d'après BAC STL CL 2004) : $\begin{cases} z + iz' = -1 \\ z - z' = 2 + i \end{cases}$

V) Représentation géométrique

1°) Définitions :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal **direct** $(O, \vec{u}, \vec{v})$ tout nombre complexe z = a + bi est associé :
soit au point M de coordonnées (a,b)
soit au vecteur $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées (a,b).
z = a + bi est **l'affixe** du point M (a,b) ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$ (a,b)
M (a, b) est le **point image** du nombre complexe z = a + bi

2°) Application :

Exercice n°9 **:** Représenter dans le repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ le point A d'affixe $z_1 = -1 + 2i$, le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $z_2 = 3 - 5i$, le point B d'affixe $z_3 = 5$, le point C d'affixe $z_4 = 3i$

3°) Propriétés :

Exercice n°10 **:** le plan P est muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$

a)Quelles sont les affixes des points A, B, C, définis par : $\overrightarrow{OA} = 2\vec{v}$ $\overrightarrow{OB} = -3\vec{u}$ et $\overrightarrow{OC} = 3\vec{u} + 4\vec{v}$
b) Placer dans le plan P les points image des nombres complexes : 3 + 2i, -1, -1 + 3i, 2 + 5i, -2 - 5i, 2 - 5i.
c) Après avoir observé la figure, que peut-on dire des points images de deux nombres complexes conjugués, de deux nombres complexes opposés ?

Propriétés **: les points images de deux nombres complexes conjugués sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.**
les points images de deux nombres complexes opposés sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

Exercice n°11 **:** Les vecteurs $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ ont pour affixes respectives : $z_1 = 2 - i$ et $z_2 = -1 + 4i$.

Quelles sont les affixes des vecteurs : $\vec{V_1} + \vec{V_2}$, $-2\vec{V_1}$, $\vec{V_1} - \vec{V_2}$?

4°) Conséquences :

Soit A un point d'affixe z_A et B un point d'affixe z_B
Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$
I le milieu de [AB] a pour affixe $\dfrac{z_A + z_B}{2}$

Exercice n°12 **:** exercice d'après bac GC, GE, GM réunion 2003.
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

Soit les points A, B , C et D d'affixes respectives : $z_A = \sqrt{3} + 3i$, $z_B = 1$, $z_C = 4 + (1 - \sqrt{3})i$ et $z_D = (3 + \sqrt{3}) + (4 - \sqrt{3})i$

a) Placer ces 4 points dans le repère $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

b) Calculer les affixes des milieux des segments [AC] et [BD]. En déduire que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

Exercice n°13 **:** Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.
On note A, B, C et D les points d'affixes respectives : $z_A = 4$; $z_B = 4i$; $z_C = -2\sqrt{3} - 2i$ et $z_D = 2 - 2\sqrt{3}i$.
a) Placer ces quatre points dans le plan complexe.
b) Montrer que $z_{\overrightarrow{BC}} = \sqrt{3}\, z_{\overrightarrow{AD}}$; Que peut-on en déduire ? Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

VI) Forme trigonométrique

1°) Activité d'approche : voir exercice n°1 du TD n°

2°) Module et argument

a) Définition :

Soit z = a + bi un nombre complexe non nul. M est le point d'affixe z dans un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$
On appelle module du nombre complexe z, et on note | z |, le nombre égal à la distance OM.
$| z | = OM = \|\overrightarrow{OM}\|$
On appelle argument du nombre complexe z non nul, et on note arg (z), tout nombre de la forme θ + 2kπ, où θ est une mesure de l'angle ($\vec{u}$, $\overrightarrow{OM}$) et k un nombre entier relatif.

Notation : Si z a pour module ρ et pour argument θ on écrit z = [ρ , θ] (notation polaire).

b) Application. *Exercice n°14* : Représenter dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2cm) le point G d 'affixe $z_G = \left[0{,}5 ; -\dfrac{3\pi}{4}\right]$.

c) Propriété : deux nombres complexes conjugués non nuls ont même module et ont des arguments opposés.

3°) Passage de la forme algébrique à la forme trigo nométrique

CHAPITRE N°……. : NOMBRES COMPLEXES .

Activité d'approche : voir exercice n°2 du TD n°

Soit z un nombre complexe non nul.

Si la forme algébrique est z = a + bi alors le module de z est $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$
et un argument de z est θ tel que : $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

*Suite de l'exercice **n°13*** **:**
c) Calculer les modules des nombres z_A , z_B , z_C et z_D .
En déduire que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice n°15 **:** Déterminer le module et un argument de chacun des nombres suivants :
a) $1-i\sqrt{3}$ b) 3 c) -2 d) -2i e) 7 – 3i f) -4 + i

4°) Passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique :

Activité d'approche voir exercice n°3 du TD n°

Soit z un nombre complexe non nul.
Si la notation polaire est z = [ρ,θ], alors la partie réelle de z est ρ cos θ et la partie imaginaire de z est ρ sin θ

Autrement dit :

Le nombre complexe de module ρ et d'argument θ, s'écrit : z = ρ cosθ + iρ sinθ = ρ (cosθ + i sinθ)
Cette écriture est la forme trigonométrique du nombre complexe.

Exercice n°16 **:** Soit z un nombre complexe de module ρ et d'argument θ. Déterminer la partie réelle et imaginaire de z si :
a) $\rho = 2$ et $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$ b) $\rho = 3$ et $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ c) ρ = 5 et θ = 0 d) ρ = 5 et θ = 3,4

VII) Module d'une différence

1°) Module et distance

a) ***Exercice n°17*** : calculer la distance OM, où M est le point d'affixe z dans chacun des cas suivants : z = -1 - i ; z = -3i

b) Théorème :

soit M_1 et M_2 deux points d'affixes respectives z_1 et z_2 : $|z_1 - z_2| = \|\overrightarrow{M_1M_2}\| = M_1M_2$.

2°) Applications :

Exercice n°18 **:** le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$, calculer la distance AB si : A a pour affixe z_A = 2 – i et B a pour affixe z_B = -1 + 3i.

Exercice n°19 **:** le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$, placer les points A, B et C et déterminer la nature du triangle ABC : z_A = 4, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = 1 - i\sqrt{3}$.

Exercice n°20 **:** Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité 1 cm.

On donne les points A, B et C d'affixes respectives : z_A = 4+4i, z_B=4–4i et z_C=2+2i$\sqrt{3}$

a) Déterminer l'affixe du milieu I de [A, B]

b) Déterminer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

c) Placer les points A, B, C et I dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$.

d) Déterminer la nature du triangle ABC, justifier votre réponse.
En déduire que les points A, B et C sont sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice n°21 **:** Soient les nombres complexes z_1 = 2 - 2i, $z_2 = 4 - i$ et $z_3 = 3 + i$ et $z_4 = 1$.

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$, placer les points M_1, M_2, M_3, M_4 d'affixes respectives z_1, z_2, z_3, z_4.

Calculer z_2 - z_1 et z_3 – z_4. Que peut -on en déduire pour le quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$?

Calculer $|z_3 - z_1|$ et $|z_4 - z_2|$. Que peut -on en déduire pour le quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$?

Calculer $|z_4 - z_1|$ et $|z_2 - z_1|$. Que peut -on en déduire pour le quadrilatère $M_1M_2M_3M_4$?

Exercice n°22 (exercice n°37 page 109) **:** Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ d'unité graphique 1 cm.

a) Placer sur la figure les points A, B, C et I d'affixes respectives $z_A=4+3i$, $z_B=4-3i$, $z_C=-i$ et $z_I=3$.
b) Calculer les modules des nombres complexes $z_A - z_I$; $z_B - z_I$; $z_C - z_I$.
Que représente le point I pour le triangle ABC ?

*Fin de l'exercice **n°13*** **:**
Calculer les distances AB et CD et comparer les résultats obtenus. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

3°) Ensemble de points **: *Exercice n°23*** : Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z-(1+i)| = 3$.

VII) Argument d'une différence

1°) Argument et angles de vecteurs

Théorème : $\boxed{\text{soit } M_1 \text{ et } M_2 \text{ deux points d'affixes respectives } z_1 \text{ et } z_2 \text{ : tout argument de } (z_2 - z_1) \text{ est une mesure de l'angle } \left(\vec{u},\overrightarrow{M_1M_2}\right).}$

Exercice n°24 **:** Dans le plan rapporté au repère orthonormal $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère le point A d'affixe 1-2i.

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que : arg (z – (1 – 2i)) = $\frac{\pi}{2} + k\pi$