CHAPITRE …..: APPLICATION DE LA DÉRIVATION

I) Ce qu'il faut savoir :

1°) Dérivation et sens de variation

Théorème 1 :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de ℝ. Soit J un intervalle inclus dans I.
Si, pour tout x de J, f'(x) est strictement positif, alors f est strictement croissante sur J.
Si, pour tout x de J, f'(x) est strictement négatif, alors f est strictement décroissante sur J.
Si, pour tout x de J, f'(x) = 0, alors f est constante sur J.

Remarques : une fonction peut être strictement monotone sur [a, b] bien que f '(x) s'annule pour un nombre fini d'éléments de]a, b[: c'est le cas de $f(x) = x^3$ qui est strictement croissante sur [-2, 2] bien que f '(0) = 0.

2°) Dérivée et extremums locaux

Théorème 2 :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de ℝ Soit x_0 appartenant à I, distinct des extrémités de I.
Si la dérivée f' s'annule en changeant de signe en x_0, alors cette fonction présente en ce point soit un maximum, soit un minimum

Rappel : la tangente à la courbe représentative d'une fonction au point correspondant à un maximum ou un minimum local est parallèle à l'axe des abscisses.

3°) Equation de la tangente au point d'abscisse x_A à la courbe représentative de f.

Rappels :

Si $A(x_A, y_A)$ est un point de la représentation graphique C d'une fonction usuelle f alors $y_A = f(x_A)$

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point A d'abscisse x_A est $f'(x_A)$.

II) Fonctions polynômes du second degré.

1°) Signe de ax + b, rappel.

Théorème 3: lorsque $a \neq 0$, la droite D représentant la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ traverse l'axe des abscisses au point d'abscisse $-\frac{b}{a}$.

Le signe de ax+ b est donné par le tableau ci-contre :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de ax+b		signe de **–a**	0	signe de **a**	

2°) Application : ***exercice n°1.*** Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = -3x^2 + 2x - 1$

a) Soit f ' la fonction dérivée de f. Calculer f '(x).
b) Déterminer le signe de f'(x) suivant les valeurs de x.
c) En déduire le sens de variation de f.
d) Dresser le tableau de variation de f (vérifier les résultats obtenus à l'aide de la calculatrice).
e) Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse –1.

III) Fonctions polynômes du troisième degré.

1°) Signe d'un produit rappel :

Pour déterminer le signe d'un produit de deux fonctions, il suffit :
-de chercher le signe de chaque fonction,
-d'établir un tableau de signes en appliquant la règle des signes.

Lorsque deux nombres sont de même signe, leur produit est positif
Lorsque deux nombres sont de signes contraires, leur produit est négatif

2°) Applications :

Exercice n°2 *:* Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$
a) Calculer sa fonction dérivée.
b) Étudier le signe de f'(x) en fonction de x.
c) En déduire le tableau de variation de f. (vérifier les résultats obtenus à l'aide de la calculatrice).

Exercice n°3 *:* Soit la fonction f définie sur [0 , 15] par : $f(x) = x^3 - 30x^2 + 225x$
a) Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f sur [0 , 15].
b) Montrer que f'(x) = 3(x – 15) (x – 5) et étudier son signe sur [0 , 15].
c) En déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle [0 , 15] (vérifier les résultats obtenus à l'aide de la calculatrice).
d) Tracer la courbe C représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan : 0,5 cm représente une unité sur l'axe des abscisses et 1 cm représente 50 unités sur l'axe des ordonnées.
e) Résoudre graphiquement l'équation f(x) = 250.

CHAPITRE …..: APPLICATION DE LA DÉRIVATION

IV) Fonction rationnelle.

1°) Signe d'un quotient rappel :

Pour déterminer le signe d'un quotient de deux fonctions, il suffit : -de chercher le signe de chaque fonction, -de repérer la ou les valeurs interdites si elle(s) existe(nt). -d'établir un tableau de signes en appliquant la règle des signes.

2°) Applications **: *exercice n°4*** . Soit f la fonction définie sur]0; +∞[par $f(x)=\dfrac{x^2+5x+4}{2x}$

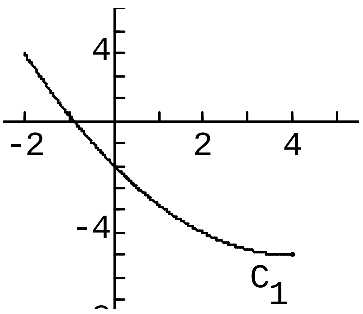
a) Etudier les variations de la fonction.
b) Compléter le tableau de valeurs :

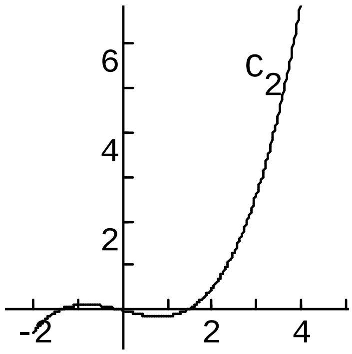
x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	5	6	7
f(x)											

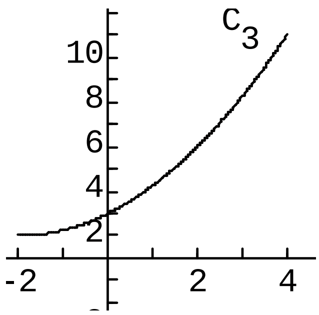
c) Tracer dans un repère orthonormé (unité 1cm) la courbe C de la fonction f.
d) Tracer la tangente à la courbe au point A d'abscisse 1 après en avoir donné une équation.
e) Tracer la tangente à la courbe au point B d'abscisse 2 après en avoir donné une équation.

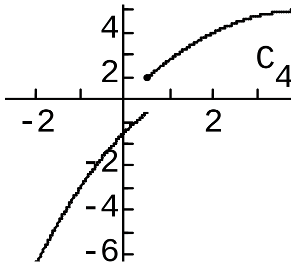
V) Fonction dérivable et strictement monotone sur [a,b]. Résolution approchée d'équations de la forme f(x) = 0

1°) Activité d'approche : ***exercice n°5.***









Compléter les trois premières lignes du tableau par oui ou par non et puis compléter la dernière ligne.

	f_1	f_2	f_3	f_4
La fonction est strictement monotone sur [-2 ; 4]				
La fonction est dérivable sur [-2;4]				
f(-2) et f(4) sont de signes contraires.				
Le nombre de solutions de f(x) = 0 est				

2°) Théorème 4 :

Si f est dérivable et strictement monotone sur [a,b] et si f(a) et f(b) sont de signes contraires, alors l'équation f(x) = 0 admet une solution et une seule dans [a,b].

Ce théorème est notamment utilisé pour justifier l'existence de solutions pour une équation, en particulier lorsqu'on ne sait pas la résoudre directement, à l'aide du calcul algébrique.

Application : ***exercice n°6.*** Soit l'équation $x^3 + 2x + 1 = 0$. Nous ne savons pas la résoudre algébriquement.
On se propose de démontrer qu'il existe une solution unique α dans] –1 , 0 [
Soit la fonction définie sur [-1 , 0] par $f(x) = x^3 + 2x + 1$ et soit (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$, unités : 10 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 5 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.
a) Étudier les variations de f sur [-1 , 0] c'est à dire :
Calculer sa dérivée f'(x). Déterminer le signe de la dérivée. Faire le tableau de variation de f.
b) Démontrer que l'équation f(x) = 0 admet une seule solution α dans [-1,0].
c) Compléter le tableau de valeurs suivant dans lequel chaque valeur approchée sera donnée à 10^{-2} près.

x	-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0
f(x)											

d) Utiliser le tableau du 3°) pour donner un encadr ement de α d'amplitude 10^{-1}
e) Construire la courbe (C). Placer le point A de C d'abscisse α sur la figure.