CHAPITRE …… : FONCTIONS POLYNOMES

I) Les pré-requis

1°) Savoir développer.

Exercice n°1 : Développer les expressions suivantes.

$A(x) = (x-4)(x^2 + 3x - 2)$ $B(x) = \frac{1}{6}(x-4)(2x+3)(3x-5)$ $C(x) = (2x + 1)^2 (x - 3)$

2°) Savoir calculer avec des expressions rationnelles.

Exercice n°2 : Ecrire les expressions suivantes sous forme de quotient, x étant un réel positif.

$A(x) = x + 1 - \frac{1}{2x+3}$ et $B(x) = \frac{x-5}{x+4} - \frac{x-1}{x+1}$.

II) Connaître le vocabulaire concernant les fonctions polynômes :

1°) Exemple : $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 4$ est un polynôme du troisième degré ;
L'expression $2x^3$ est un monôme de degré 3.
L'expression $-5x^2$ est un monôme de degré 2 ; -5 est le coefficient de x^2
L'expression -4 est un monôme de degré 0 ; -4 est le terme constant du polynôme.

2°) Définition :

> Si $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ sont des réels donnés avec $a_n \neq 0$, la fonction f définie sur ℝ par :
>
> $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ est appelée fonction polynôme.
> Les nombres réels $a_0, a_1, ... a_n$ sont appelés **coefficients** du polynôme.
> Le nombre entier positif n est le **degré** du polynôme.

Les coefficients de P(x) de l'exemple avec la notation de la définition sont :
$a_0 = -4$ $a_1 = 7$ $a_2 = -5$ $a_3 = 2$.

3°) Applications :

Exercice n°3 : Dire parmi les fonctions ci-dessus celles qui sont des fonctions polynômes en complétant les cases du tableau par oui ou par non.

	$f(x) = 2x + 3$	$g(x) = x + 1 + \frac{7}{4+x}$	$h(x) = -x^2 + 6x - 8$	$i(x) = \sqrt{x+2}$	$j(x) = x + \cos x$	$k(x) = x^4 - 2x + 1$
Fonction Polynôme ?						

Exercice n°4 : Pour chacun des polynômes compléter le tableau.

	$f(x) = 3x^3-7x^4+2x^2-6$	$g(x) = 4x^5-x^2+2x^7$	$h(x) = 7x^4+x^2-3x$	$i(x) = -x^3-x^2-1+3x$	$j(x) = x^4-3x^3-6x+2$	$k(x) = 2x^2$
coefficient de x^2						
Coefficient du terme de 3ième degré						
Terme constant						
Coefficient du terme de plus haut degré						
Degré du polynôme						

Exercice n°5 : Soit g et h les polynômes définis par : $g(x) = (4x^2 - 7x + 3)(2x^3 - x)$ et $h(x) = (x - 4)(4x^3 + 2x - 1)$.
Sans les développer, dire pour chacun : quel est son degré, son terme de plus haut degré, son terme de plus bas degré ?

4°) Fonction rationnelle :

a) Exemple : la fonction k définie sur ℝ par $k(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 + 2}{x^2 + 5}$ est une fonction rationnelle.

b) Définition : On appelle fonction rationnelle toute fonction dont l'expression peut s'écrire sous la forme d'un quotient de deux polynômes.

III) Egalité de fonctions polynômes :

1°) Activité d'approche .

Exercice n°6 :

CHAPITRE …… : FONCTIONS POLYNOMES

Soit les polynômes : $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 4x - 6$ $Q(x) = 2(x^2 + x + 1)(x-3)$ $R(x) = 2x^3 + x^2 - 19x + 4$

a) Calculer P(1), Q(1), et R(1) b) Calculer P(2), Q(2), et R(2)

c) Calculer P(0), Q(0), et R(0)

2°) Définition : Deux polynômes f et g sont égaux si et seulement si pour tout nombre réel x, f(x) = g(x)

3°) Suite de l'exercice n°6 : Développer Q(x). Que remarques-tu ?

4°) Théorème d'identification :

Deux polynômes sont égaux si et seulement si les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux

5°) Applications

a) Avec des polynômes :

Exercice n°7 : Calculer les réels a et b tels que : pour tout x réel, $3x - 5 = a(x - 2) + b(3x - 4)$.

Exercice n°8 : Soit $P(x) = 3x^2 - 5x - 2$. Calculer les réels a, et b tels que : $P(x) = (x - 2)(ax + b)$.

Exercice n°9 : Soit $P(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 2$. Calculer les réels a, b et c tels que : $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$.

Exercice n°10 : Soit $P(x) = x^4 - 6x^2 - 3x + 2$. Déterminer un polynôme Q tel que : $P(x) = (x + 2)Q(x)$.

Méthode de recherche de Q(x) :
- Recherche (immédiate) du degré de Q(x)
- Recherche (immédiate) du coefficient du monôme de plus haut degré de Q(x)
- Recherche (immédiate) du terme constant de Q(x)
- Recherche du coefficient de chacun des monômes constituant Q(x)
- Contrôle des résultats en développant (x-a) Q(x) : obtient-on P(x) ?

Exercice n°11 : d'après BAC GM GMA 2002 :

Soit $h(x) = 4x^3 - 8x^2 - x + 2$

- Montrer que 2 est solution de h(x) = 0.
- Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout x de $\mathbb{R}$ $h(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ h(x) = 0.

Pour s'entraîner : exercices n°32 et 33 page 43. n°1 & 2 p39 (corrigés) et n°35 p43

b) Avec des fonctions rationnelles :

Exercice n°12 : Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout x de $]-3,+\infty[$, on ait : $\dfrac{2x^2 + 5x - 2}{x + 3} = ax + b + \dfrac{c}{x + 3}$

Pour s'entraîner : exercices n°70 et 71 page 45.

IV) Racine d'un polynôme :

1°) Définition : **Le réel a est une racine (ou un zéro) du polynôme f si et seulement si f(a) = 0**

2°) Applications

Exercice n°13 :

a) 2 et 1 sont-ils racines de $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 14$?

b) Déterminer toutes les racines de $f(x) = x^3 - 4x$.

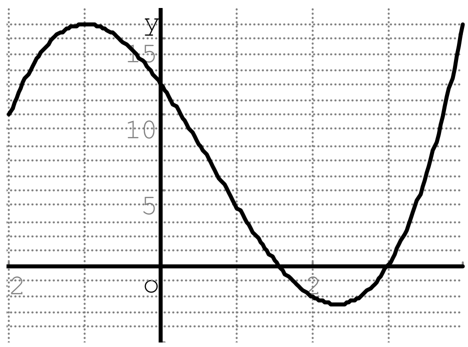
c) Soit $P(x) = x^3 - 2x^2 - 7x + 12$.

On considère P comme une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

La représentation graphique de P est alors la courbe ci-contre.

Quelle conjecture peut-on faire sur une racine de P ?

Vérifier la conjecture par le calcul.



3°) Avec des polynômes du 1er degré.

Exercice n°14: Déterminer mentalement la racine des polynômes du premier degré suivants :

	x-1	x+4	-x+3	4 -x	-x-2	x
racine						
	2x-1	3x+4	3x-6	15x - 6	5x	
racine						
	-3x + 3	-2x - 4	-15x + 3	-6x+4	-x	
racine						

4°) Avec des polynômes du 2nd degré.

Exercice n°15 : Mettre les polynômes suivants sous la forme d'un produit de facteurs, et en déterminer toutes les racines :

a) $3x^2 + 7x$; b) $2x^2 - 8x + 8$; c) $x^2 - 9$

On remarque que si le polynôme est factorisable par x – a alors a est racine de ce polynôme

Exercice n°16 : Dire quel est le degré des polynômes suivants et en déterminer toutes les racines :

a) $(2x - 1)(3x + 2)$ b) $x(-4x + 2)$ c) $3x^2$

5°) Avec des polynômes du 3ième degré.

Exercice n°17 : exercice n°34 page 42 *. Calculer f(2), f(1). Que constatez vous ?.*

V) Utilisation d'une racine pour la factorisation d'un polynôme

1°) Théorème (admis) : critère de factorisation de (x-a) dans un polynôme

Si un polynôme P(x) s'annule pour x = a, alors on peut mettre (x-a) en facteur dans ce polynôme : il existe un polynôme Q(x) tel que, pour tout x réel, P(x) = (x - a)Q(x).

Remarque : si n est le degré du polynôme, P(x), alors Q(x) est un polynôme de degré n - 1

2°) Application directe (QCM)

Exercice n°18 : Dans chacun des cas suivants, une réponse au moins est exacte : la (ou les) cocher

a) Le polynôme $f(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 2$ est factorisable par :	□ $x - 2$	□ $x - 1$	□ x
b) Le polynôme $g(x) = x^2 + x - 2$ est factorisable par :	□ $x - 1$	□ $x - 2$	□ $x + 2$
c) Le polynôme $h(x) = x^4 - 1$ est factorisable par :	□ $x - 1$	□ $x + 1$	□ $x^2 - 1$
d) Le polynôme $k(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$ est factorisable par :	□ $x - 2$	□ $2x + 1$	□ $x^2 - 1$

3°) Savoir utiliser une racine d'un polynôme pour le factoriser

Exercice n°19 : Soit le polynôme $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$. Calculer f(2) . En déduire une factorisation de f(x)

4°) Autres applications

Exercice n°20 : Les polynômes suivants possèdent une racine "apparente". Trouvez-la puis factorisez le polynôme.

a) $x^2 + 5x - 6$ b) $2x^2 + 7x + 5$ c) $3x^2 + 4x + 1$ d) $5x^2 - 7x - 12$ e) $4x^2 - x - 14$ f) $2x^2 + 5x + 3$

Exercice n°21 *:* Chercher pour chacun des polynômes suivants une racine appartenant à l'ensemble {-3, -2, -1, 1, 2, 3}.
Ecrivez alors le polynôme sous forme d'un produit de facteurs du premier degré :

a) $4x^3 - 4x^2 - x + 1$ b) $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$ c) $3x^3 + x^2 - 3x - 1$ d) $x^3 - 4x^2 + x + 6$

Pour s'entraîner : exercices n°63 1°) page 44, 66 1°) 671°) 2°) page 45. n°5 p39 (corrigé) & n°42 p43

Exercice n°22 : Soit l'équation $\frac{1}{2}x^3 - x^2 - 6x + 12 = 0$.

Soit la fonction polynôme P définie par $P(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 - 6x + 12$

1°) A l'aide de la calculatrice, visualiser la représentation graphique de la fonction P.
Quelle conjecture peut-on faire sur une racine de P ?
2°) Vérifier la conjecture par le calcul. En déduire une factorisation de P(x).

3°) Résoudre $\frac{1}{2}x^3 - x^2 - 6x + 12 = 0$.