

CHAPITRE : SUITES ARITHMETIQUES

\\Portable_hélène\Mes documents\Terminales\le_suites\lfcge_suites_arithmetiques.doc

I) Définition :

1°) Exemple : soit la suite définie par :

$u_0 = -1$; $u_1 = 1$; $u_2 = 3$; $u_3 = 5$; $u_4 = 7$; ... chaque terme s'obtient en ajoutant 2 au précédent : cette suite est arithmétique.

2°) Définition :

Une suite arithmétique est une suite numérique dont chaque terme s'obtient en ajoutant au précédent un nombre réel constant appelé *raison*.

Pour tout nombre entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + a$

3°) Application :

Exercice n°1 : On considère la suite arithmétique de raison $a = -100$ et de premier terme 2000. Ecrire u_{n+1} en fonction de u_n . Calculer le deuxième terme et le troisième terme.

II) Expression de u_n en fonction de n :

1°) propriété 1 :

- a) Pour une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison a : $u_n = u_0 + na$ pour tout n de $\mathbb{Z}$
 b) Pour une suite arithmétique de premier terme u_1 et de raison a : $u_n = u_1 + (n-1)a$ pour tout n de $\mathbb{Z}^*$

Cas a) $u_1 = u_0 + a$
 $u_2 = u_1 + a = u_0 + 2a$
 $u_3 = u_2 + a = u_0 + 3a$
 $\vdots$
 $u_n = u_{n-1} + a = u_0 + na$

Cas b) $u_2 = u_1 + a$
 $u_3 = u_2 + a = u_1 + 2a$
 $u_4 = u_3 + a = u_1 + 3a$
 $\vdots$
 $u_n = u_{n-1} + a = u_1 + (n-1)a$

On peut retenir que : $u_n = (\text{premier terme}) + (\text{nombre de termes avant } u_n) \times (\text{raison})$

2°) Applications :

Exercice n°2 :

a) Calculer le 1000^{ème} nombre impair

b) Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = -\frac{1}{2}$. Calculer le 33^{ème} terme.

Exercice n°3 : exercice n°13 page 62

III) Somme des n premiers entiers naturels non nuls :

1°) Exemple : somme des 100 premiers entiers naturels

Somme écrite de gauche à droite :

$$S_{100} = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$

Somme écrite de droite à gauche :

$$S_{100} = 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1$$

Addition membre à membre des 2 égalités.

$$2xS_{100} = 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101$$

Dans chaque colonne, la somme est égale à 101

$$2xS_{100} = 100 \times 101$$

$$S_{100} = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

Remarque : Gauss fit cette démonstration mentalement à l'âge de 7 ans.

2°) Propriété 2 :

La somme des n premiers nombres entiers non nuls est : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

3°) **Exercice n°4 :** calculer la somme des 23 premiers entiers naturels non nuls.

4°) Somme des premiers termes d'une suite arithmétique :

a) **Exercice n°5 :** Déterminer la somme des 100 premiers termes d'une suite arithmétique définie par les données suivantes :
 Premier terme : $u_0 = 2$; raison $a = 5$.

b) **Exercice n°6 :** Calculer $S = 2 + 5 + 8 + \dots + 74$

c) Propriété 3 (admise) :

Si (u_n) est une suite arithmétique alors la somme de ses premiers termes est $\left(\text{nombre de termes} \right) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$

Pour s'entraîner : exercice n°1 page 61 sauf 4) et 5)

CHAPITRE : SUITES ARITHMETIQUES

\\Portable_hélène\Mes documents\Terminales\11e_suites\11e_suites_arithmétiques.doc

V) Reconnaître et utiliser une suite arithmétique dans un contexte concret

Exercice n°5 : Une Municipalité a décidé de rénover chaque année 45 logements, qui viendront s'ajouter au parc de logements H.L.M. En janvier 1997, on dénombre 450 logements HLM..

1°) Montrer que le nombre de logements H.L.M.est une suite arithmétique dont on donnera le premier terme et la raison.

2°) Combien y aura-t-il de logements H.L.M. en janvier 2005 ?

3°) On compte un loyer annuel par logement occupé. On suppose tous les logements H.L.M. occupés et tous les loyers payés. Combien la municipalité aura-t-elle perçu de loyers pendant la période 1997-2005, années extrêmes comprises ?

III) Sens de variation et représentation graphique :

1°) Théorème :

Une suite arithmétique de raison a est :

- croissante si $a > 0$
- décroissante si $a < 0$
- constante si $a = 0$.