

CHAPITRE : SUITES GEOMETRIQUES.

\\Portable_hélien\mes documents\Terminales\file_suites\tsstg_suites_geom.doc

I) Définition :

1°) Exemple : soit la suite définie par :

$u_0 = 2$; $u_1 = 6$; $u_2 = 18$; $u_3 = 54$; ... chaque terme s'obtient en multipliant par 3 le précédent

2°) Définition :

Une suite géométrique est une suite numérique dont chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par une constante b ($b \neq 0$) appelée raison.

Pour tout nombre entier naturel n , $u_{n+1} = bu_n$

3°) Applications :

Exercice n°1 : On considère la suite géométrique de raison $b = 0,65$ et de premier terme 2000. Ecrire u_{n+1} en fonction de u_n .
Calculer le deuxième terme et le troisième terme.

Exercice n°2 : Une entreprise lance un nouveau produit sur le marché. La première semaine elle en vend 500 kg et constate que les ventes augmentent de chaque semaine de 10%. On note u_n le nombre de kg vendus la n ème semaine.

- Préciser la valeur de u_1 puis calculer u_2 et u_3
- En déduire l'écriture de u_{n+1} en fonction de u_n .
- Quelle est la nature de la suite ?

II) Terme général d'une suite géométrique:

1°) Propriété 1 :

Pour une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison b : $u_n = u_0 b^n$ pour tout n de $\mathbb{Z}$
Pour une suite géométrique de premier terme u_1 et de raison b : $u_n = u_1 b^{n-1}$ pour tout n de $\mathbb{Z}^*$.

On peut retenir : $u_n = (\text{premier terme}) \times (\text{raison})^{\text{nombre de termes avant } u_n}$

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 b \\ u_2 &= u_1 b = u_0 b^2 \\ u_3 &= u_2 b = u_0 b^3 \\ &\vdots \\ u_n &= u_{n-1} b = u_0 b^n \end{aligned}$$

2°) Application : **exercice n°3 :**

a) Soit la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 16$ et de raison $q = \frac{1}{2}$. Calculer le 32^{ème} terme.

b) Soit la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_1 = 1$ et de raison b . $u_2 = \frac{1}{3}$. Calculer b , u_5 , le 11^{ème} terme.

Pour s'entraîner : exercice n°8 p 61.

3°) Rechercher la raison d'une suite géométrique : exercice n°7 p 280.

4°) Reconnaître et utiliser une suite géométrique dans un contexte concret : intérêts composés.

Exercice n°4 :

Caroline dispose de 8 000 €. Elle place cette somme, à intérêts composés, au taux annuel de 4,5% l'an.

On désigne par la notation C_0 la somme initiale ; $C_0 = 8\,000$.

C_n désigne la somme dont Caroline disposera au bout de n années de placement.

- Calculer C_1 , C_2 .
- Déterminer C_{n+1} en fonction de C_n .
- Reconnaître la nature de (C_n) .
- En déduire l'expression de C_n en fonction de n .
- De quelle somme Caroline disposera-t-elle si elle laisse son argent placé pendant 10 ans ?
- Au bout de combien de temps la somme aura-t-elle doublé ?

Pour s'entraîner : exercice 15 p 63

exercice n°26 p 284 , 46 p 290, 51, 52 et 53 p 290, 68 p 293, 78 et 79 p 297. TP 5 p 269, exercice 9 p 280, 11 p 281

III) Sens de variation et limites :

1°) Exemples :

Exercice n°5 :

a) A l'aide d'une calculatrice, compléter le tableau ci-dessous (arrondir les résultats au centième) :

$1,2^2$	$1,2^3$	$1,2^4$	$1,2^5$	$1,2^6$

Méthode : on utilise l'éditeur de fonction :

CHAPITRE : SUITES GEOMETRIQUES.

\\Portable_hélène\mes documents\Terminales\file_suites\stg_suites_geom.doc

Entrer $y = 1,2^x$

Prendre 2 comme valeur minimale, prendre 1 comme pas du tableau de valeurs.

b) En utilisant deux méthodes différentes (utilisation du tableau de valeurs de la calculatrice ou utilisation de la fonction $\ln$), déterminer le plus petit entier n tel que $1,2^n > 8$

Exercice n°6 : A l'aide d'une calculatrice, compléter le tableau ci-dessous (arrondir les résultats au centième) :

$0,85^2$	$0,85^3$	$0,85^4$	$0,85^5$	$0,85^6$

En utilisant deux méthodes différentes (utilisation du tableau de valeurs de la calculatrice ou utilisation de la fonction $\ln$), déterminer le plus petit entier n tel que $0,85^n < 0,05$

2°) Théorème admis :

Une suite géométrique de raison b positive et de premier terme positif est :

•**croissante si $b > 1$ et a pour limite $+\infty$. On écrit :** $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

•**décroissante si $0 < b < 1$ et a pour limite 0. On écrit :** $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

•**constante si $b = 1$.**

3°) Applications :

Exercice n°7 : déterminer le sens de variation et la limite de la suite (u_n) dans chaque cas :

a) (u_n) est la suite géométrique de raison $b = 1,01$ et de terme initial 0,000 1.

b) (u_n) est la suite géométrique de raison $b = 0,99$ et de terme initial 10 000.

Méthode : on vérifie que la raison et le terme initial sont strictement positifs puis on compare la raison à 1.

Exercice n°8 :

a) Soit (u_n) est la suite géométrique de raison $b = 1,2$ et de terme initial $u_0 = 4$.
Déterminer le premier terme de la suite qui est supérieur à 150 000.

b) (u_n) est la suite géométrique de raison $b = 0,7$ et de terme initial $u_1 = 1,5$.
Déterminer le premier terme de la suite qui est inférieur à 2×10^{-6}

4°) Représentation graphique : voir livre page 49.

IV) Somme des n premières puissances d'un nombre réel b (b non nul)

1°) Exemple : calculer $S = 1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 729$

2°) Propriété 2 :

Si n est un nombre entier naturel et si b est un nombre réel différent de 1 : la somme $1 + b + b^2 + \dots + b^n = \frac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

3°) **Exercice n°9 :** calculer $S = 1 + 5 + 25 + 125 + \dots + 15625 + 78125$

4°) Somme des n premiers termes d'une suite géométrique:

a) **Exercice n°10 :** déterminer la somme des n premiers termes d'une suite géométrique définie par les données suivantes :

Premier terme : $u_0 = 2$; raison $b = \frac{1}{2}$, $n = 10$

b) Propriété 3 :

Si (u_n) est une suite géométrique dont la raison est différente de 1, alors la somme de ses premiers termes est :

$$\frac{\text{premier terme} \times (1 - \text{raison}^{\text{nbre de termes}})}{1 - \text{raison}}$$

Exercice n°11 : on considère la suite v_n telle que $v_{n+1} = 1,1v_n$ avec $v_1 = 100$.
Calculer la somme des dix premiers termes.

Pour s'entraîner : exercices n°6 premier terme u_0) et 7 p 61. exercice n°9 p 62 (premier terme u_1), 32 à 35 p 68.

Exercice n°12 : Un propriétaire loue un appartement à partir du 1^{er} janvier 2004, pour 9 ans et pour un montant annuel de 6000€ en 2004, à condition que le locataire accepte une augmentation annuelle de 2%. On note u_n le loyer payé en 2004 + n .
Calculer le montant total des loyers versés pendant neuf années, arrondi à l'unité.

Pour s'entraîner : exercices n°10 p 62.