CHAPITRE ….: FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

I) Définition de la fonction logarithme népérien

1°) Activité d'approche : voir TD n°…..

2°) Définition :

On admet qu'il existe une unique fonction, appelée **logarithme népérien, notée ln, telle que :**
ln est définie et dérivable sur]0, +∞[; ln(1) = 0 ; pour tout x de]0, +∞[, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

notation : $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln x$

on a : **ln1 = 0**

Exercice n°1 : Calculer ln ($x^2 - 1$) pour x = $\sqrt{2}$ et pour x = - $\sqrt{2}$.

3°) Déterminer la dérivée d'une fonction où figure la fonction logarithme :

la fonction ln est une fonction nouvelle ; ce n'est ni une fonction polynôme, ni une fonction rationnelle.

la fonction ln est dérivable sur]0 , +∞[et, pour tout x de]0 , +∞[, (ln x)' = ln' x = $\frac{1}{x}$

Exercice n°2 **:** calculer la dérivée de la fonction f sur]0 , +∞[par :

a) f(x) = $0{,}5x^2 + x - \ln x$ b) f(x) = 4 lnx c) f(x) = $\frac{1}{x} + \ln x$ d) f(x) = $\frac{\ln x}{x}$

e) f(x) = $x \ln x$ f) f(x) = $(\ln x)^2$

Méthode :
On identifie la forme de f (somme u+v, produit ku, produit uv, quotient $\frac{1}{v}$, quotient $\frac{u}{v}$, u^n…).
On calcule les dérivées des éléments formant la fonction : u'(x) =…. ; v'(x) = ….. sachant que ln'(x) = $\frac{1}{x}$
On applique les formules de bases : (u+v)' ; (ku)' ; (uv)' ; $\left(\frac{1}{v}\right)'$; $\left(\frac{u}{v}\right)'$; $(u^n)'$….
On simplifie ou on factorise si nécessaire.

Pour s'entraîner : exercices n°1a) à d) page 279, 32 1°) page 287, 37 a) à c) p 288, 38 p 288 (calcul de dérivées).

4°) Etudier une fonction définie avec un logarithme : exercice n°39 p 288.

5°) Déterminer l'ensemble sur lequel est définie une expression de la forme ln(u(x)).

On ne peut pas calculer le logarithme d'un nombre négatif, ni de 0.

Exercice n°3 :
a) indiquer parmi les valeurs de x suivantes celles pour lesquelles le nombre ln (x+2) existe :
10 ; 5,1 ; 0; -0,5 ; -1 ; -2 ; -3 ; -11 .

b) On considère la fonction f définie par f(x) = ln (x+2). Résoudre dans ℝ l'inéquation 2+ x > 0. En déduire les valeurs de x pour lesquelles f(x) existe.

c) Déterminer l'ensemble sur lequel est définie l'expression suivante : ln(x – 3) .
d) Déterminer l'ensemble sur lequel est définie l'expression suivante : ln(1 – x) + ln (2x).

Méthode : on résout les inéquations u(x) >0 (ou les inéquations u(x) >0 et v(x) >0)

II) Etude de la fonction ln

1°) Sens de variation et courbe représentative.

Exercice n°4 :

a) Etudier les variations de la fonction logarithme népérien (calcul de la dérivée, étude du signe de la dérivée et tableau de variation).

b) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant en utilisant la touche LN d'une calculatrice.

CHAPITRE ….: FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

x	0,1	0,5	1	2	3	4	6
ln x							

Tracer la courbe représentative de la fonction logarithme dans un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

c) On observe sur le graphique qu'il existe un nombre x pour lequel on a ln x = 1. On note e ce nombre : **ln e = 1.**

Compléter le tableau suivant :

x	2,6	2,7	2,8	2,9
ln x				

En déduire la valeur de e arrondie à 0,1 près.
Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée de e à 0,01 près.

2°) Résolutions graphiques :

Exercice n°5 :
a) A l'aide d'une calculatrice et de la représentation graphique de la fonction logarithme népérien, donner une valeur approchée du réel x tel que ln x = 2.
b) Reprendre le a) avec ln x = -1.

Propriété : **Pour tout réel y, l'équation ln x = y admet une solution et une seule**

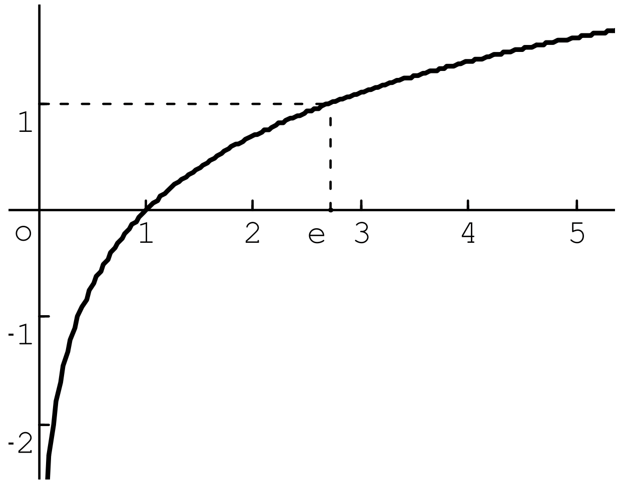
c) Résoudre en utilisant le graphique l'inéquation ln x > 0.

d) Résoudre en utilisant le graphique l'inéquation ln x < 0.

3°) Ce qu'il faut savoir :

Tableau de variation de la fonction ln et représentation graphique de ln.

Valeurs de x	0 1 e +∞
Signe de f'(x) = $\frac{1}{x}$	+
Variations de f(x) = ln(x)	↗ (0 en 1, 1 en e)



Nombre e : ln(e) = 1 et e ≈ 2,718.
e s'obtient sur une calculatrice avec la touche e^x dans le cas où x = 1.

Signe de ln(x) : ln x = 0 ⇔ x = 1
ln x < 0 ⇔ 0 < x < 1
ln x > 0 ⇔ x > 1

Comparaison de deux logarithmes : la fonction ln est **strictement croissante sur**]0, +∞[donc ln (a) et ln(b) sont rangés dans le même ordre que a et b.
Autrement dit : pour a > 0 et b > 0 on a : ln a = ln b est équivalent à a = b
ln a < ln b est équivalent à a < b
ln a > ln b est équivalent à a >b

4°) ***Exercice n°6*** **:**

Soit la fonction f définie sur [0,2 ; 6] par : $f(x) = \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} + 1$

a) Calculer f '(x)
b) Etudier le signe de f'(x) et en déduire les variations de f.
c) Dresser le tableau de variation de f.
d) Déterminer pour quelle valeur de x, la fonction atteint son maximum et préciser la valeur de ce maximum.
e) Compléter le tableau de valeurs suivant (donner les valeurs de f(x) à 10^{-2} près).

x	0,2	0,5	1	1,5	2	4	6
f(x)							

f) Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm)
g) Déterminer à l'aide d'une calculatrice graphique une valeur approchée à 10^{-2} près par excès de la solution de l'équation f(x) = 0.

III) Résolution d'équations et d'inéquations :

1°) Propriétés :

Pour a > 0 et b > 0 on a : ln a = ln b est équivalent à a = b
ln a < ln b est équivalent à a < b
ln a > ln b est équivalent à a >b

2°) Savoir résoudre une équation comportant un logarithme.

CHAPITRE ….: FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Exercice n°7 *:* Résoudre dans $\left]\frac{1}{5};+\infty\right[$ l'équation (E) : ln (5x –1) = 0.

Méthode : On détermine l'ensemble de définition D sur lequel l'équation est définie. On ramène l'équation à une équation de la forme lna = lnb. On résout l'équation a = b. On élimine les éventuelles solutions qui n'appartiennent pas à D.

3°) Savoir résoudre une inéquation comportant un logarithme :

Exercice n°8 *:* Résoudre dans $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ l'inéquation: ln (2x –3) < 1

Pour s'entraîner : exercice n°15 a)c) p 281et 57 a), c) et d p 291

4°) Savoir étudier le signe d'une fonction :

Exercice n°9 : Etudier le signe de la fonction f définie sur]0, +∞[par f(x) = (x-1) lnx.
Pour s'entraîner : exercice n°58 1°) p 291.

5°) Savoir étudier le sens de variation d'un fonction :

Exercice n°10 : Etudier les variations de la fonction f définie sur]0, +∞[par f(x) = xlnx –2x.
Pour s'entraîner : exercice n°25 p 284.

IV) Propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien.

1°) Découvrir les propriétés algébriques de la fonction ln : voir exercice n°3 du TD n°

2°) Formules fondamentales :

a et b sont deux nombres réels strictement positifs et n est un entier relatif : Logarithme d'un produit : ln (ab) = ln a + ln b Logarithme d'un inverse : $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$ Logarithme d'un quotient : $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ Logarithme d'une puissance : ln (a^n) = n ln a avec n entier relatif. Logarithme d'une racine carrée : ln ($\sqrt{a}$) $= \frac{1}{2}\ln a$

Exemples : ln(20) – ln(10) = ln $\left(\frac{20}{10}\right)$ = ln(2), ln(32) =ln(2^5) = 5ln2, $\frac{1}{2}\ln(49) = \ln\left(\sqrt{49}\right) = \ln(7)$.

3°) Logarithme d'une puissance de e :

Exercice n°11 :
a) Utiliser les propriétés algébriques de la fonction ln pour calculer les nombres :
$\ln\left(\frac{1}{e}\right)$; $\ln(e^2)$; $\ln(e^5)$; $\ln(e^n)$ où n est entier relatif ; $\ln\left(\sqrt{e}\right)$; $\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$.

b) Rappel : $\boxed{\text{a est un nombre réel et n est un nombre entier : } a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$

calculer $\ln\left(e^{-2}\right)$, $\ln\left(e^{-n}\right)$ où n est un nombre entier.

c) Exprimer en fonction de ln2 les nombres suivants :
$\ln(2e)$; $\ln\left(\frac{e}{2}\right)$; $\ln\left(2e^3\right)$; $\ln\left(4e^3\right)$; $\ln\left(\frac{2}{e^2}\right)$.

d) Ecrire les entiers suivants sous la forme ln (e^n) : 4, -1, 6 et –3.

A retenir : ln (e^n) = n où n est un entier relatif. ($\ln\left(\sqrt{e}\right) = \frac{1}{2}$

Pour s'entraîner : exercice n°12 p 281, 54 p 291.

4°) Simplifier des expressions où figurent des logarithmes :

CHAPITRE ….: FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Exercice n°12 : a) Ecrire plus simplement : A = $\frac{1}{2}\ln e - 5\ln e^2 - \ln\frac{1}{e}$

b) Calculer en fonction de ln 2 : B = ln 2 + ln (4e) – ln ($16e^2$)

c) Calculer en fonction de ln 3 : C = $\ln\left(\sqrt{3}\right) - \ln 81 + \ln(3e)$.

5°) Résoudre une équation.

Exercice n°13 : résoudre dans 3, les équations suivantes :

a) ln x = 4

b) ln(x) = -2.

c) ln(2)+2ln(x)=ln(3)

d) ln(x) - ln(4) = ln(4-x)

Méthode :

- On détermine l'ensemble D sur lequel l'équation est définie.
- On ramène l'équation à une équation de la forme ln(a) = ln(b), en utilisant les propriétés algébriques de la fonction logarithme.
- On résout l'équation a = b
- On élimine les éventuelles solutions qui n'appartiennent pas à D.

Pour s'entraîner : exercice n°14 p 281 , 56 p 291 , 58 2) p 291, exercice 4 épreuve 2 p 309,

6°) Résoudre une inéquation.

Exercice n°14 : résoudre dans]0 ; +∞[, l'inéquation ln x ≤ 2.

7°) Etude d'une fonction avec la fonction ln : exercice n°80 p 298.

Pour s'entraîner : exercice n°15 b) d) p 281, 57 b) p 291.

V) Fonction de la forme ln[(u(x)]

1°) Fonction dérivée :

a) Théorème :

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I. La fonction f définie sur I par f(x) = ln [u(x)] est dérivable sur I et f'(x) = $\frac{u'(x)}{u(x)}$.

b) ***Exercice n°15*** : Soit la fonction définie sur [30,200] par f(x) = 0,02x2-90ln(0,001x). Déterminer f'(x) pour tout x de [30,200].
Pour s'entraîner : exercice n°1°) et f) p 279, 32 2°) p 287, 37d) et e) p 288.

2°) Etudier les variations d'une fonction ln[u(x)].

Exercice n°16 : Etudier les variations de la fonction f définie sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$ par f(x) = ln (-2x + 1) .

Pour s'entraîner : TP 1 p 267, exercice n°2 p 279, 40 p 282. Exercice 4 p 307 (épreuve 1).

VI) Utiliser la fonction logarithme népérien pour un ajustement.

Exercice n°24 p 284 sauf 3°) et 4°).