CHAPITRE …..: APPLICATION DE LA DÉRIVATION

I) Equation de tangentes :

1°) Déterminer le nombre dérivé d'une fonction f en a.

a) Rappel :

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point A d'abscisse x_A est f '(x_A). (voir TD n°5)

b) ***Exercice n°1*** : exercice n°15 page 230. *Pour s'entraîner : n°16 page 230. n°58 et 59 page 239.*

2°) Déterminer une équation de tangente à la courbe C de f au point d'abscisse a.

a) Rappels :

Si D, une droite non parallèle à l'axe des abscisses, a pour coefficient directeur m et si D passe par le point A(x_A, y_A) alors D a pour équation réduite $y = m(x – x_A) + y_A$ (voir TD n°1)

Si A(x_A, y_A) est un point de la représentation graphique C d'une fonction usuelle f alors $y_A = f(x_A)$ (voir TD n°4).

b) ***Exercice n°2*** **:** Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = x^2 + 5x + 2$.
Soit C la courbe représentant cette fonction et A le point de C d'abscisse –1
Déterminer une équation de la tangente à C au point A (vérifier le résultat obtenu à l'aide de la calculatrice).

c) Propriété :

Soit A un point de la représentation graphique C d'une fonction usuelle f.
L'équation réduite de la tangente en A à C est :
$y = f'(x_A)(x – x_A) + f(x_A)$

Pour s'entraîner : exercices n° 17 et 18 p 230 et n° 61 et 62 p 239 et 95 p 246.

II) Sens de variation d'une fonction :

1°) Dérivation et sens de variation
Théorème 1 :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de ℝ.
Soit J un intervalle inclus dans I.
Si, pour tout x de J, f'(x) est strictement positif, alors f est strictement croissante sur J.
Si, pour tout x de J, f'(x) est strictement négatif, alors f est strictement décroissante sur J.
Si, pour tout x de J, f'(x) = 0, alors f est constante sur J.

2°) Dérivée et extremums locaux

Théorème 2 :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de ℝ Soit x_0 appartenant à I, distinct des extrémités de I.
Si la dérivée f' s'annule en changeant de signe en x_0, alors cette fonction présente en ce point soit un maximum, soit un minimum

Rappel : la tangente à la courbe représentative d'une fonction au point correspondant à un maximum ou un minimum local est parallèle à l'axe des abscisses.

III) Fonctions polynômes du second degré.

1°) Signe de ax + b, rappel.

Théorème :
Lorsque a ≠0, la droite D représentant la fonction affine f : x ↦ ax + b traverse l'axe des abscisses au point d'abscisse $-\frac{b}{a}$.

Le signe de ax+ b est donné par le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
ax+b	signe de –**a**	0	signe de **a**

2°) ***Exercice n° 3.*** Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = - 3x^2 +2x -1$
a) Soit f' la fonction dérivée de f. Calculer f'(x).
b) Déterminer le signe de f'(x) suivant les valeurs de x.
c) En déduire le sens de variation de f.
d) Dresser le tableau de variation de f (vérifier les résultats obtenus à l'aide de la calculatrice.
Pour s'entraîner : exercice n°22 p 232, exercice n°81 et n°82 page 243

IV) Fonctions polynômes du troisième degré.

1°) Signe d'un produit rappel :

CHAPITRE …..: APPLICATION DE LA DÉRIVATION

Pour déterminer le signe d'un produit de deux fonctions, il suffit :
-de chercher le signe de chaque fonction,
-d'établir un tableau de signes en appliquant la règle des signes.

Lorsque deux nombres sont de même signe, leur produit est positif
Lorsque deux nombres sont de signes contraires, leur produit est négatif

2°) Applications :

Exercice n° 4 : Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = x^3 -3 x^2 +1$
a) Calculer sa fonction dérivée.
b) Étudier le signe de f'(x) en fonction de x.
c) En déduire le tableau de variation de f. (vérifier les résultats obtenus à l'aide de la calculatrice).

Exercice n° 5 *:* Soit la fonction f définie sur [0 , 15] par : $f(x) = x^3 -30 x^2 +225x$
a) Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f sur [0 , 15].
b) Montrer que $f'(x) = 3(x – 15) (x – 5)$ et étudier son signe sur [0 , 15].
c) En déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle [0 , 15] (vérifier les résultats obtenus à l'aide de la calculatrice).
d) Tracer la courbe C représentative de la fonction f dans un repère orthogonal du plan : 0,5 cm représente une unité sur l'axe des abscisses et 1 cm représente 50 unités sur l'axe des ordonnées.
e) Résoudre graphiquement l'équation f(x) = 250.

Pour s'entraîner : exercice n°23 p 232, n°83 p 243, 87, 89 page 244 et 90 p 245.

V) Fonction rationnelle.

1°) Signe d'un quotient rappel :

Pour déterminer le signe d'un quotient de deux fonctions, il suffit :
-de chercher le signe de chaque fonction,
-de repérer la ou les valeurs interdites si elle(s) existe(nt).
-d'établir un tableau de signes en appliquant la règle des signes.

2°) ***Exercice n°6*** : Soit f la fonction définie sur [0,5 ; +∞[par $f(x) = \dfrac{x^2+5x+4}{2x}$

a) Etudier les variations de la fonction.
b) Compléter le tableau de valeurs :

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	5	6	7
f(x)											

c) Tracer dans un repère orthonormé (unité 1cm) la courbe C de la fonction f.
d) Tracer la tangente à la courbe au point A d'abscisse 1 après en avoir donné une équation.
e) Tracer la tangente à la courbe au point B d'abscisse 2 après en avoir donné une équation.

Exercice n°7 : Dans une entreprise fabriquant de l'électroménager, le coût de production unitaire (exprimé en euros) pour x centaines de machines à laver produites est donné par la fonction C définie par : $C(x) = \dfrac{300x+200}{5x+2}$ pour $x \in [1; 10]$

a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Donner les valeurs arrondies au dixième d'euro près.

x	1	2	3	4	5	10
C(x)						

b) Vérifier, en détaillant les calculs que : $C'(x) = -\dfrac{400}{(5x+2)^2}$ pour $x \in [1; 10]$

où C' désigne la fonction dérivée de la fonction C.
c) Étudier le signe de C'(x) pour x élément de [1 ; 10]. En déduire sur l'intervalle [1 ; 10] le tableau de variations de C.

d) Tracer la représentation graphique de la fonction C dans un repère orthogonal. On prendra 1 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 1 cm pour unité sur l'axe des ordonnées, en commençant à 60 euros.

e) La direction de l'entreprise a fixé comme objectif à la production des machines à laver de ne pas dépasser un coût unitaire de 62 euros. Déterminer graphiquement à partir de combien de machines à laver produites l'objectif de la direction est atteint. Cette lecture devra être justifiée par un tracé en pointillés.

f) Déterminer par un calcul à partir de combien de machines à laver produites l'objectif de la direction est atteint.

Pour s'entraîner : exercice n°84, 85 p 243, 88 page 244.