CHAPITRE N°…. : TAUX D'EVOLUTION.

I) Rappels (voir TD n°….)

1°) Définition :

On considère deux nombres réels strictement positifs y_1 et y_2.
On appelle variation absolue de y_1 à y_2 le nombre $y_2 - y_1$
On appelle taux d'évolution de y_1 à y_2 le nombre $t = \dfrac{y_2 - y_1}{y_1}$.

Dans le cas d'une **hausse** t est **positif**
Dans le cas d'une **baisse** t est **négatif**.

2°) Propriété :

Si t est le taux d'évolution de y_1 à y_2 alors $y_2 = (1+t)y_1$.
Cette situation peut-être visualisée par le schéma suivant :

$$Y_1 \xrightarrow{\times(1+t)} y_2$$

Définition : c = 1+ t est le coefficient multiplicateur de y_1 à y_2

Le coefficient multiplicateur est un nombre strictement positif :
un coefficient multiplicateur supérieur à 1 correspond à une augmentation (hausse).
un coefficient multiplicateur inférieur à 1 correspond à une diminution (baisse) .

II) Taux d'évolution moyen à l'issue de deux évolutions successives :

1°) Moyenne géométrique de deux nombres positifs

a) Définition : la moyenne géométrique de deux nombres réels strictement positifs x_1 et x_2 est le nombre $\sqrt{x_1 \times x_2}$ **ou encore** $(x_1 \times x_2)^{\frac{1}{2}}$.

b) application :
Exercice n°1 *:* déterminer la valeur arrondie approchée arrondie à 10^{-4} près de la moyenne géométrique de 1,03 et 1,04.
Pour s'entraîner : exercice n°5 p 19 et 49 p 30

2°) Taux global à l'issue de deux évolutions successives :

Pour deux évolutions successives de y_1 à y_2 (de taux t_1) puis de y_2 à y_3 (de taux t_2),
l'évolution finale de y_1 à y_3 (de taux T), a pour coefficient multiplicateur le produit des coefficients multiplicateurs :
$1+T = (1+t_1)(1+t_2)$.

Cette situation peut-être visualisée par le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd} y_1 \arrow[r, "\times(1+t_1)"] \arrow[rr, bend right, "\times(1+T)"'] & y_2 \arrow[r, "\times(1+t_2)"] & y_3 \end{tikzcd}$$

On en déduit que le taux d'évolution global de y_1 à y_3 est : $T = (1+t_1)(1+t_2) - 1$

3°) Taux moyen à l'issue de deux évolutions successives :

On appelle taux moyen d'évolution le taux unique t qui, répété deux fois, fournit le même résultat que les deux évolutions successives, c'est à dire que $1+T = (1+t)^2$.
Autrement dit $(1+t)^2 = (1+t_1)(1+t_2)$ **ce qui donne** $(1+t) = \sqrt{(1+t_1)(1+t_2)}$.
On dit que 1 + t est la moyenne géométrique de $(1+ t_1)$ et $(1 + t_2)$.
t est le taux moyen d'évolution : il s'interprète en terme de hausse ou de baisse en pourcentage.

4°) Application :
Exercice n°2 *:* en 2004, le taux d'évolution était de +0,10 et en 2005, pour le même livre, le taux d'évolution était de –0,05.
a) Calculer le taux global T correspondant à ces deux évolutions successives. Interpréter ce taux en terme de hausse ou de baisse en pourcentage.
b) Calculer le taux moyen annuel t d'évolution durant cette période (arrondir au millième) et l'interpréter ensuite en terme de hausse ou de baisse en pourcentage.
Pour s'entraîner : exercice n°7 p 19, 32 p 27, 50 p 30 et 51 à 54 p 31.

III) Taux d'évolution moyen à l'issue de n évolutions successives :

1°) Moyenne géométrique de n nombres positifs

a) Définition :

la moyenne géométrique de n nombres réels strictement positifs x_1 , x_2, …, x_n est le nombre $(x_1 \times x_2 \times \ldots\ldots \times x_n)^{\frac{1}{n}}$ **.**

b) Application : ***exercice n°3*** *:* déterminer la moyenne géométrique des trois nombres 2, 9 et 12.

2°) Taux global à l'issue de n évolutions successives :

Pour n évolutions successives de y_1 à y_2 (de taux t_1), de y_2 à y_3 (de taux t_2), ……, de y_n à y_{n+1} (de taux t_n), l'évolution finale de y_1 à y_{n+1} (de taux T), a pour coefficient multiplicateur le produit des coefficients multiplicateurs : $1+T = (1+t_1)(1+t_2)\ldots.(1+t_n)$.

Cette situation peut-être visualisée par le schéma suivant :

$$y_1 \xrightarrow{\times(1+t_1)} y_2 \xrightarrow{\times(1+t_2)} y_3\ldots\ldots\ldots \quad y_n \xrightarrow{\times(1+t_n)} \quad y_{n+1}$$

$$y_1 \xrightarrow[\times(1+T)]{\hspace{20em}}$$

On en déduit que le taux d'évolution global de y_1 à y_n est : $T = (1+t_1)(1+t_2)\ldots.(1+t_n) - 1$

3°) Taux moyen à l'issue de n évolutions successives :

On appelle taux moyen d'évolution le taux unique t qui, répété n fois, fournit le même résultat que les n évolutions successives, c'est à dire que $1+T=(1+t)^n$ **.**

Autrement dit $(1+t)^n = (1+t_1)(1+t_2)\times\ldots\ldots;\times(1+t_n)$ **ce qui donne** $(1+t) = [(1+t_1)(1+t_2)\times\ldots\ldots;\times(1+t_n)]^{\frac{1}{n}}$ **.**
On dit que 1 + t est la moyenne géométrique de 1+ t_1, 1 + t_2, …., 1+ t_n.
t est le taux moyen d'évolution : il s'interprète en terme de hausse ou de baisse en pourcentage.

4°) Applications :

a) Calculer le taux d'évolution moyen, connaissant le taux global.
Exercice n°4 **:** le nombre de chômeurs d'un pays a baissé de 2% en un an.
Calculer le taux d'évolution mensuel moyen t du nombre de chômeurs.

b) Calculer le taux moyen de n évolutions successives de taux t_1, t_2 ,… t_n .

Exercice n°5 *:* au cours de l'année passée, le prix d'un produit a successivement augmenté de 10%, puis de 5% et enfin baissé de 7 %. Calculer le taux d'évolution moyen t des trois évolutions successives du prix.
Pour s'entraîner : exercice n° 26 p 25, 5 p 280, 22 p 282 et 42 p 289.

IV) Indice simple en base 100

1°) Activité d'approche :
Exercice n°6 **:**
a) Alphonse a placé 3 100 € ; le capital acquis au bout d'un an s'élève à 3 472 €.
Sans calculer le taux d'intérêt annuel, calculer le capital qu'aurait acquis Alphonse au bout d'un an s'il avait placé 100 € dans les mêmes conditions.

b) Honoré a placé 2 600 € ; le capital acquis au bout d'un an s'élève à 2 912 €.
Sans calculer le taux d'intérêt annuel, calculer le capital qu'aurait acquis Alphonse au bout d'un an s'il avait placé 100 € dans les mêmes conditions.

c) Lequel des deux placements est le plus avantageux ?

2°) Cas général

a) Définition :
Pour traduire des évolutions successives, on utilise souvent la notion d'indice : on choisit une date de référence n, on détermine l'évolution par rapport à cette date de référence.
A cette valeur de référence, on affecte l'indice 100.

Périodes	Période 1	Période 2
Valeurs	y_1	y_2
Indices	100	I

y_1 et y_2 étant deux nombres réels strictement positifs, l'indice simple en base 100 de y_2 par rapport à y_1 est $I = 100\dfrac{y_2}{y_1}$ **.**

autrement dit : $\boxed{\text{Indice à la date k} = \dfrac{\text{Valeur à la date k}}{\text{Valeur à la date de réference}} \times 100}$

b) Remarques :

Un indice n'a pas d'unité.
Un indice est toujours strictement positif.

Lorsque l'indice est plus petit que 100, il traduit une baisse de y_1 à y_2
Lorsque l'indice est égal à 100, il traduit une stabilité de y_1 à y_2
Lorsque l'indice est plus grand que 100, il traduit une hausse de y_1 à y_2 .

Pour un indice, il est indispensable de bien fixer l'année de référence à laquelle on attribue l'indice 100.

3°) Applications :

a) Calculer un indice connaissant les valeurs :

Exercice n°7 **:** déterminer l'indice de $y_2 = 18$ par rapport à $y_1 = 12$. Déterminer l'indice de $y_4 = 4$ par rapport à $y_3 = 25$
Pour s'entraîner : exercices n°9 à 10 p 20

b) Calculer une valeur en utilisant un indice :

Exercice n°8 **:** C_1, C_2, C_3 et C_4 sont les chiffres annuels , exprimés en millions d'euros, d'une entreprise après respectivement 1, 2, 3 et 4 ans d'activité.
- Sachant que $C_1 = 6{,}8$ et que l'indice de C_2 par rapport à C_1 est 123, calculer C_2
- Sachant que $C_4 = 8{,}51$ et que l'indice de C_4 par rapport à C_3 est 92,5, calculer C_3

Pour s'entraîner : exercices n°11 p 20, 33 p 27

V) Relation entre indice, coefficient multiplicateur et taux d'évolution :

1°) Rappels :

y_1 et y_2 étant deux nombres réels strictement positifs :

l'indice simple en base 100 de y_2 par rapport à y_1 est $I = 100\dfrac{y_2}{y_1}$ **et donc** $\dfrac{y_2}{y_1} = \dfrac{I}{100}$**.**

le taux d'évolution t de y_1 à y_2 est le nombre t tel que $y_2 = (1+t)y_1$ **et donc tel que** $\dfrac{y_2}{y_1} = 1 + t$ **.**

Conclusion : $\boxed{\dfrac{I}{100} = 1 + t}$**.**

2°) Applications :

a) Passer de l'indice au taux d'évolution **:** $t = \dfrac{I}{100} - 1$

Exercice n°9 **:**

2001	2002	2003	2004
100	120	132	98

Le tableau donne les indices de 2001 à 2004 pour la production d'un secteur industriel. Calculer le pourcentage d'augmentation de cette production de 2002 à 2003, puis le pourcentage de diminution de cette production de 2003 à 2004.

Exercice n°10 : en 1973 la consommation française de carburant automobile était de 15,8 millions de tonnes. On choisit 1973 comme année de base. En 1985, l'indice de consommation était 114, et il était 83 en 2002.
- Calculer la consommation de carburant en 1985, puis en 2002.
- En utilisant les indices, calculer le taux d'évolution de 1985 à 2002.

pour s'entraîner : exercices n°12, 13 p 20, 34 p 27

b) Passer du taux d'évolution à l'indice : $I = 100(1+t)$

Exercice n°11 : on note c_1, c_2, c_3 et c_4 les chiffres d'affaires, exprimés en millions d'euros, du secteur textile d'une entreprise après respectivement 1, 2, 3 et 4 ans d'activité.
- Sachant que l'indice de c_2 par rapport à c_1 est 68,12, calculer le taux d'évolution t de c_1 à c_2
- Sachant que le taux d'évolution de c_3 à c_4 est 28,4%, calculer l'indice de c_4 par rapport à c_3

pour s'entraîner : exercices n°12, 13 p 20, 27 p 25, 35 p 27

VI) Approximation d'un taux d'évolution :

1°) Taux d'évolution global de deux évolutions successives de même taux : rappel.

Pour deux évolutions successives de y_1 à y_2 (de taux t) puis de y_2 à y_3 (de même taux t), l'évolution finale de y_1 à y_3 (de taux T), a pour coefficient multiplicateur le produit des coefficients multiplicateurs :
1+T = (1+t)(1+t).

Cette situation peut-être visualisée par le schéma suivant :

$$y_1 \xrightarrow{\times(1+t)} y_2 \xrightarrow{\times(1+t)} y_3$$

$$y_1 \xrightarrow[\times(1+T)]{} y_3$$

On en déduit que le taux d'évolution global de y_1 à y_3 est T tel que : $1+T = (1+t)^2$

2°) Á petit taux, petites erreurs :

Exercice n°12 : a) Le taux d'évolution global de deux évolutions successives de taux 20% est-il égal à deux fois ce taux, c'est à dire 40% ? b) Vérifier que le taux d'évolution global de deux évolutions successives de taux 1% est à peu égal à deux fois de taux, c'est à dire 2%.

3°) Approximation du taux d'évolution global de deux évolutions successives de même taux :

a) Formule d'approximation locale : $\boxed{\text{pour } t \text{ proche de zéro : } (1+t)^2 \approx 1+2t}$

b) Application aux petits taux : $\boxed{\text{pour } t \text{ voisin de zéro, deux évolutions successives au taux } t \text{ correspondent à une évolution de } 2t}$

exemples : augmenter deux fois une quantité de 1% revient sensiblement à l'augmenter de 2%.
Diminuer deux fois une quantité de 0,5% revient sensiblement à la diminuer de 1%.

c) ***Exercice n°13*** : Àu cours de l 'année écoulée, le prix d'un produit a subi deux évolutions successives de même taux t =-0,8%.
En justifiant la démarche suivie, déterminer une valeur approchée du taux d'évolution global du prix de ce produit au cours de l'année.
pour s'entraîner : exercices n°18, 19 p 22

4°) Evolution réciproque :

a) rappel :

Pour une évolution de y_1 à y_2 (de taux t), l'évolution réciproque de y_2 à y_1 (de taux t') a pour coefficient multiplicateur l'inverse du coefficient multiplicateur : $1+t' = \dfrac{1}{1+t}$ **.**

On en déduit que le taux de l'évolution réciproque, de y_2 à y_1 est $t' = -1 + \dfrac{1}{1+t}$ **.**

Cette situation peut-être visualisée par le schéma suivant :

$$Y_1 \underset{\times(1+t')}{\overset{\times(1+t)}{\rightleftarrows}} y_2$$

b) *Exercice n°14* : Le taux de l'évolution réciproque d'une évolution de taux 20% est-il égal à l'opposé de ce taux, c'est à dire -20% ? Vérifier que le taux de l'évolution réciproque d'une évolution de taux 1% est à peu égal à l'opposé de ce taux, c'est à dire -1%.

5°) Approximation du taux d'une évolution réciproque

le taux t' de l'évolution réciproque de taux t est $t' = -1 + \dfrac{1}{1+t}$.

Donc $t' = -\dfrac{1+t}{1+t} + \dfrac{1}{1+t} = \dfrac{-1-t+1}{1+t} = \dfrac{-t}{1+t}$.

a) Formule d'approximation locale : $\boxed{\textbf{pour t proche de 0 : } \dfrac{-t}{1+t} \approx -t}$

b) Application aux petits taux :

$\boxed{\textbf{pour t voisin de 0, le taux de l'évolution réciproque d'une évolution de taux t est à peu près égal à } -t}$**.**

c) *Exercice n°15* : Le taux d'évolution du prix d'un produit du 1^{er} au 31 août dernier est t=-0,8%.
En justifiant la démarche suivie, déterminer une valeur approchée du taux t' de l'évolution réciproque.
Pour s'entraîner : exercices n°20 p 23, 36 et 37 p 27