

# CHAPITRE N°.... : TAUX D'EVOLUTION.

C:\Documents and Settings\Hélène\Mes documents\Terminales\Tle Taux d'évolution\cours\_taux\_d\_evolution .doc

## I) Rappels (voir TD n°....)

1°) Définition :

On considère deux nombres réels strictement positifs  $y_1$  et  $y_2$ .

On appelle variation absolue de  $y_1$  à  $y_2$  le nombre  $y_2 - y_1$

On appelle taux d'évolution de  $y_1$  à  $y_2$  le nombre  $t = \frac{y_2 - y_1}{y_1}$ .

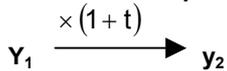
Dans le cas d'une hausse  $t$  est positif

Dans le cas d'une baisse  $t$  est négatif.

2°) Propriété :

Si  $t$  est le taux d'évolution de  $y_1$  à  $y_2$  alors  $y_2 = (1+t)y_1$ .

Cette situation peut-être visualisée par le schéma suivant :



Définition :  $c = 1+t$  est le coefficient multiplicateur de  $y_1$  à  $y_2$

Le coefficient multiplicateur est un nombre strictement positif :

un coefficient multiplicateur supérieur à 1 correspond à une augmentation (hausse).

un coefficient multiplicateur inférieur à 1 correspond à une diminution ( baisse) .

## II) Taux d'évolution moyen à l'issue de deux évolutions successives :

1°) Moyenne géométrique de deux nombres positifs

a) Définition : la moyenne géométrique de deux nombres réels strictement positifs  $x_1$  et  $x_2$  est le nombre  $\sqrt{x_1 \times x_2}$  ou encore

$$(x_1 \times x_2)^{\frac{1}{2}}.$$

b) application :

**Exercice n°1** : déterminer la valeur arrondie approchée arrondie à  $10^{-4}$  près de la moyenne géométrique de 1,03 et 1,04.

Pour s'entraîner : exercice n°5 p 19 et 49 p 30

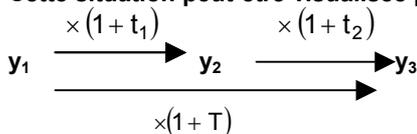
2°) Taux global à l'issue de deux évolutions successives :

Pour deux évolutions successives de  $y_1$  à  $y_2$  (de taux  $t_1$ ) puis de  $y_2$  à  $y_3$  (de taux  $t_2$ ),

l'évolution finale de  $y_1$  à  $y_3$  (de taux  $T$ ), a pour coefficient multiplicateur le produit des coefficients multiplicateurs :

$$1+T = (1+t_1)(1+t_2).$$

Cette situation peut-être visualisée par le schéma suivant :



On en déduit que le taux d'évolution global de  $y_1$  à  $y_3$  est :  $T = (1+t_1)(1+t_2) - 1$

3°) Taux moyen à l'issue de deux évolutions successives :

On appelle taux moyen d'évolution le taux unique  $t$  qui, répété deux fois, fournit le même résultat que les deux évolutions successives, c'est à dire que  $1+T = (1+t)^2$ .

Autrement dit  $(1+t)^2 = (1+t_1)(1+t_2)$  ce qui donne  $(1+t) = \sqrt{(1+t_1)(1+t_2)}$ .

On dit que  $1+t$  est la moyenne géométrique de  $(1+t_1)$  et  $(1+t_2)$ .

$t$  est le taux moyen d'évolution : il s'interprète en terme de hausse ou de baisse en pourcentage.

4°) Application :

**Exercice n°2** : en 2004, le taux d'évolution était de +0,10 et en 2005, pour le même livre, le taux d'évolution était de -0,05.

a) Calculer le taux global  $T$  correspondant à ces deux évolutions successives. Interpréter ce taux en terme de hausse ou de baisse en pourcentage.

b) Calculer le taux moyen annuel  $t$  d'évolution durant cette période ( arrondir au millième) et l'interpréter ensuite en terme de hausse ou de baisse en pourcentage.

Pour s'entraîner : exercice n°7 p 19, 32 p 27, 50 p 30 et 51 à 54 p 31.

## CHAPITRE N° .... : TAUX D'EVOLUTION.

C:\Documents and Settings\Hélène\Mes documents\Terminales\Tle Taux d'évolution\cours\_taux\_d'évolution .doc

### III) Taux d'évolution moyen à l'issue de n évolutions successives :

1°) Moyenne géométrique de n nombres positifs

a) Définition :

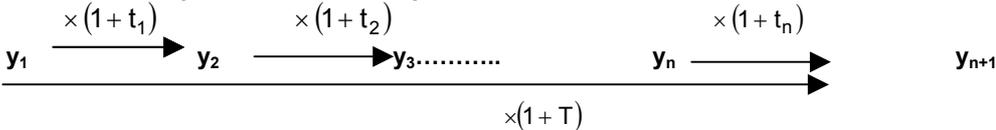
la moyenne géométrique de n nombres réels strictement positifs  $x_1, x_2, \dots, x_n$  est le nombre  $(x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n)^{\frac{1}{n}}$ .

b) Application : **exercice n°3** : déterminer la moyenne géométrique des trois nombres 2, 9 et 12.

2°) Taux global à l'issue de n évolutions successives :

Pour n évolutions successives de  $y_1$  à  $y_2$  (de taux  $t_1$ ), de  $y_2$  à  $y_3$  (de taux  $t_2$ ), ....., de  $y_n$  à  $y_{n+1}$  (de taux  $t_n$ ), l'évolution finale de  $y_1$  à  $y_{n+1}$  (de taux T), a pour coefficient multiplicateur le produit des coefficients multiplicateurs :  $1+T = (1+t_1)(1+t_2)\dots(1+t_n)$ .

Cette situation peut-être visualisée par le schéma suivant :



On en déduit que le taux d'évolution global de  $y_1$  à  $y_n$  est :  $T = (1+t_1)(1+t_2)\dots(1+t_n) - 1$

3°) Taux moyen à l'issue de n évolutions successives :

On appelle **taux moyen d'évolution** le **taux unique t** qui, répété n fois, fournit le même résultat que les n évolutions successives, c'est à dire que  $1 + T = (1 + t)^n$ .

Autrement dit  $(1 + t)^n = (1 + t_1)(1 + t_2) \times \dots \times (1 + t_n)$  ce qui donne  $(1 + t) = [(1 + t_1)(1 + t_2) \times \dots \times (1 + t_n)]^{\frac{1}{n}}$ .

On dit que  $1 + t$  est la **moyenne géométrique** de  $1 + t_1, 1 + t_2, \dots, 1 + t_n$ .

**t est le taux moyen d'évolution** : il s'interprète en terme de hausse ou de baisse en pourcentage.

4°) Applications :

a) Calculer le taux d'évolution moyen, connaissant le taux global.

**Exercice n°4** : le nombre de chômeurs d'un pays a baissé de 2% en un an.

Calculer le taux d'évolution mensuel moyen t du nombre de chômeurs.

b) Calculer le taux moyen de n évolutions successives de taux  $t_1, t_2, \dots, t_n$ .

**Exercice n°5** : au cours de l'année passée, le prix d'un produit a successivement augmenté de 10%, puis de 5% et enfin baissé de 7%.

Calculer le taux d'évolution moyen t des trois évolutions successives du prix.

Pour s'entraîner : *exercice n° 26 p 25, 5 p 280, 22 p 282 et 42 p 289.*

### IV) Indice simple en base 100

1°) Activité d'approche :

**Exercice n°6** :

a) Alphonse a placé 3 100 € ; le capital acquis au bout d'un an s'élève à 3 472 €.

Sans calculer le taux d'intérêt annuel, calculer le capital qu'aurait acquis Alphonse au bout d'un an s'il avait placé 100 € dans les mêmes conditions.

b) Honoré a placé 2 600 € ; le capital acquis au bout d'un an s'élève à 2 912 €.

Sans calculer le taux d'intérêt annuel, calculer le capital qu'aurait acquis Alphonse au bout d'un an s'il avait placé 100 € dans les mêmes conditions.

c) Lequel des deux placements est le plus avantageux ?

2°) Cas général

a) Définition :

Pour traduire des évolutions successives, on utilise souvent la notion d'indice : on choisit une date de référence n, on détermine l'évolution par rapport à cette date de référence.

A cette valeur de référence, on affecte l'indice 100.

Périodes	Période 1	Période 2
Valeurs	$y_1$	$y_2$
Indices	100	I

## CHAPITRE N°.... : TAUX D'EVOLUTION.

C:\Documents and Settings\Hélène\Mes documents\Terminales\Tle Taux d'évolution\cours\_taux\_d\_evolution.doc

$y_1$  et  $y_2$  étant deux nombres réels strictement positifs, l'indice simple en base 100 de  $y_2$  par rapport à  $y_1$  est  $I = 100 \frac{y_2}{y_1}$ .

autrement dit : Indice à la date k =  $\frac{\text{Valeur à la date k}}{\text{Valeur à la date de référence}} \times 100$

b) Remarques :

Un indice n'a pas d'unité.

Un indice est toujours strictement positif.

Lorsque l'indice est plus petit que 100, il traduit une baisse de  $y_1$  à  $y_2$

Lorsque l'indice est égal à 100, il traduit une stabilité de  $y_1$  à  $y_2$

Lorsque l'indice est plus grand que 100, il traduit une hausse de  $y_1$  à  $y_2$ .

Pour un indice, il est indispensable de bien fixer l'année de référence à laquelle on attribue l'indice 100.

3°) Applications :

a) Calculer un indice connaissant les valeurs :

**Exercice n°7 :** déterminer l'indice de  $y_2 = 18$  par rapport à  $y_1 = 12$ . Déterminer l'indice de  $y_4 = 4$  par rapport à  $y_3 = 25$

Pour s'entraîner : exercices n°9 à 10 p 20

b) Calculer une valeur en utilisant un indice :

**Exercice n°8 :**  $C_1, C_2, C_3$  et  $C_4$  sont les chiffres annuels, exprimés en millions d'euros, d'une entreprise après respectivement 1, 2, 3 et 4 ans d'activité.

• Sachant que  $C_1 = 6,8$  et que l'indice de  $C_2$  par rapport à  $C_1$  est 123, calculer  $C_2$

• Sachant que  $C_4 = 8,51$  et que l'indice de  $C_4$  par rapport à  $C_3$  est 92,5, calculer  $C_3$

Pour s'entraîner : exercices n°11 p 20, 33 p 27

### V) Relation entre indice, coefficient multiplicateur et taux d'évolution :

1°) Rappels :

$y_1$  et  $y_2$  étant deux nombres réels strictement positifs :

l'indice simple en base 100 de  $y_2$  par rapport à  $y_1$  est  $I = 100 \frac{y_2}{y_1}$  et donc  $\frac{y_2}{y_1} = \frac{I}{100}$ .

le taux d'évolution  $t$  de  $y_1$  à  $y_2$  est le nombre  $t$  tel que  $y_2 = (1 + t)y_1$  et donc tel que  $\frac{y_2}{y_1} = 1 + t$ .

Conclusion :  $\frac{I}{100} = 1 + t$ .

2°) Applications :

a) Passer de l'indice au taux d'évolution :  $t = \frac{I}{100} - 1$

**Exercice n°9 :**

2001	2002	2003	2004
100	120	132	98

Le tableau donne les indices de 2001 à 2004 pour la production d'un secteur industriel. Calculer le pourcentage d'augmentation de cette production de 2002 à 2003, puis le pourcentage de diminution de cette production de 2003 à 2004.

**Exercice n°10 :** en 1973 la consommation française de carburant automobile était de 15,8 millions de tonnes. On choisit 1973 comme année de base. En 1985, l'indice de consommation était 114, et il était 83 en 2002.

• Calculer la consommation de carburant en 1985, puis en 2002.

• En utilisant les indices, calculer le taux d'évolution de 1985 à 2002.

pour s'entraîner : exercices n°12, 13 p 20, 34 p 27

b) Passer du taux d'évolution à l'indice :  $I = 100(1 + t)$

**Exercice n°11 :** on note  $c_1, c_2, c_3$  et  $c_4$  les chiffres d'affaires, exprimés en millions d'euros, du secteur textile d'une entreprise après respectivement 1, 2, 3 et 4 ans d'activité.

• Sachant que l'indice de  $c_2$  par rapport à  $c_1$  est 68,12, calculer le taux d'évolution  $t$  de  $c_1$  à  $c_2$

• Sachant que le taux d'évolution de  $c_3$  à  $c_4$  est 28,4%, calculer l'indice de  $c_4$  par rapport à  $c_3$

pour s'entraîner : exercices n°12, 13 p 20, 27 p 25, 35 p 27

## CHAPITRE N°.... : TAUX D'EVOLUTION.

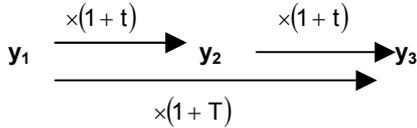
C:\Documents and Settings\Hélène\Mes documents\Terminales\Tle Taux d'évolution\cours\_taux\_d\_evolution .doc

### VI) Approximation d'un taux d'évolution :

1°) Taux d'évolution global de deux évolutions successives de même taux : rappel.

**Pour deux évolutions successives de  $y_1$  à  $y_2$  (de taux  $t$ ) puis de  $y_2$  à  $y_3$  (de même taux  $t$ ), l'évolution finale de  $y_1$  à  $y_3$  (de taux  $T$ ), a pour coefficient multiplicateur le produit des coefficients multiplicateurs :  $1+T = (1+t)(1+t)$ .**

Cette situation peut-être visualisée par le schéma suivant :



**On en déduit que le taux d'évolution global de  $y_1$  à  $y_3$  est  $T$  tel que :  $1+T = (1+t)^2$**

2°) Á petit taux, petites erreurs :

**Exercice n°12 :** a) Le taux d'évolution global de deux évolutions successives de taux 20% est-il égal à deux fois ce taux, c'est à dire 40% ? b) Vérifier que le taux d'évolution global de deux évolutions successives de taux 1% est à peu égal à deux fois de taux, c'est à dire 2%.

3°) Approximation du taux d'évolution global de deux évolutions successives de même taux :

a) Formule d'approximation locale : pour  $t$  proche de zéro :  $(1+t)^2 \approx 1+2t$

b) Application aux petits taux : pour  $t$  voisin de zéro, deux évolutions successives au taux  $t$  correspondent à une évolution de  $2t$

exemples : augmenter deux fois une quantité de 1% revient sensiblement à l'augmenter de 2%.  
Diminuer deux fois une quantité de 0,5% revient sensiblement à la diminuer de 1%.

c) **Exercice n°13 :** Au cours de l'année écoulée, le prix d'un produit a subi deux évolutions successives de même taux  $t = -0,8\%$ . En justifiant la démarche suivie, déterminer une valeur approchée du taux d'évolution global du prix de ce produit au cours de l'année.  
*pour s'entraîner : exercices n°18, 19 p 22*

4°) Evolution réciproque :

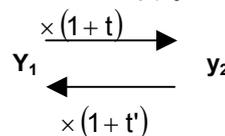
a) rappel :

**Pour une évolution de  $y_1$  à  $y_2$  ( de taux  $t$ ), l'évolution réciproque de  $y_2$  à  $y_1$  ( de taux  $t'$ ) a pour coefficient multiplicateur**

**l'inverse du coefficient multiplicateur :  $1+t' = \frac{1}{1+t}$ .**

**On en déduit que le taux de l'évolution réciproque, de  $y_2$  à  $y_1$  est  $t' = -1 + \frac{1}{1+t}$ .**

**Cette situation peut-être visualisée par le schéma suivant :**



b) **Exercice n°14 :** Le taux de l'évolution réciproque d'une évolution de taux 20% est-il égal à l'opposé de ce taux, c'est à dire -20% ? Vérifier que le taux de l'évolution réciproque d'une évolution de taux 1% est à peu égal à l'opposé de ce taux, c'est à dire -1%.

5°) Approximation du taux d'une évolution réciproque

le taux  $t'$  de l'évolution réciproque de taux  $t$  est  $t' = -1 + \frac{1}{1+t}$ .

Donc  $t' = -\frac{1+t}{1+t} + \frac{1}{1+t} = \frac{-1-t+1}{1+t} = \frac{-t}{1+t}$ .

a) Formule d'approximation locale : pour  $t$  proche de 0 :  $\frac{-t}{1+t} \approx -t$

b) Application aux petits taux :

**pour  $t$  voisin de 0, le taux de l'évolution réciproque d'une évolution de taux  $t$  est à peu près égal à  $-t$ .**

c) **Exercice n°15 :** Le taux d'évolution du prix d'un produit du 1<sup>er</sup> au 31 août dernier est  $t = -0,8\%$ . En justifiant la démarche suivie, déterminer une valeur approchée du taux  $t'$  de l'évolution réciproque.  
*Pour s'entraîner : exercices n°20 p 23, 36 et 37 p 27*