Chapitre n°1 : Programmation linéaire

I) Maximisation

1°) Principe de maximisation :

Exercice n°1 : Deux quantités x et y sont soumises à des contraintes dont les droites associées et la zone de solution (Z) sont représentées sur le graphique ci-dessous.

1) Sur ce graphique tracer la droite (Δ) d'équation $x + 2y = 100$. Cette droite a-t-elle au moins un point commun avec la zone (Z) ?

2) Tracer la droite (Δ') d'équation $x + 2y = 150$. Que peut-on remarquer entre les droites (Δ) et (Δ') . Cette droite (Δ') a-t-elle au moins un point commun avec la zone (Z) ?

3) On considère les droites (D_m) d'équation $x + 2y = m$.

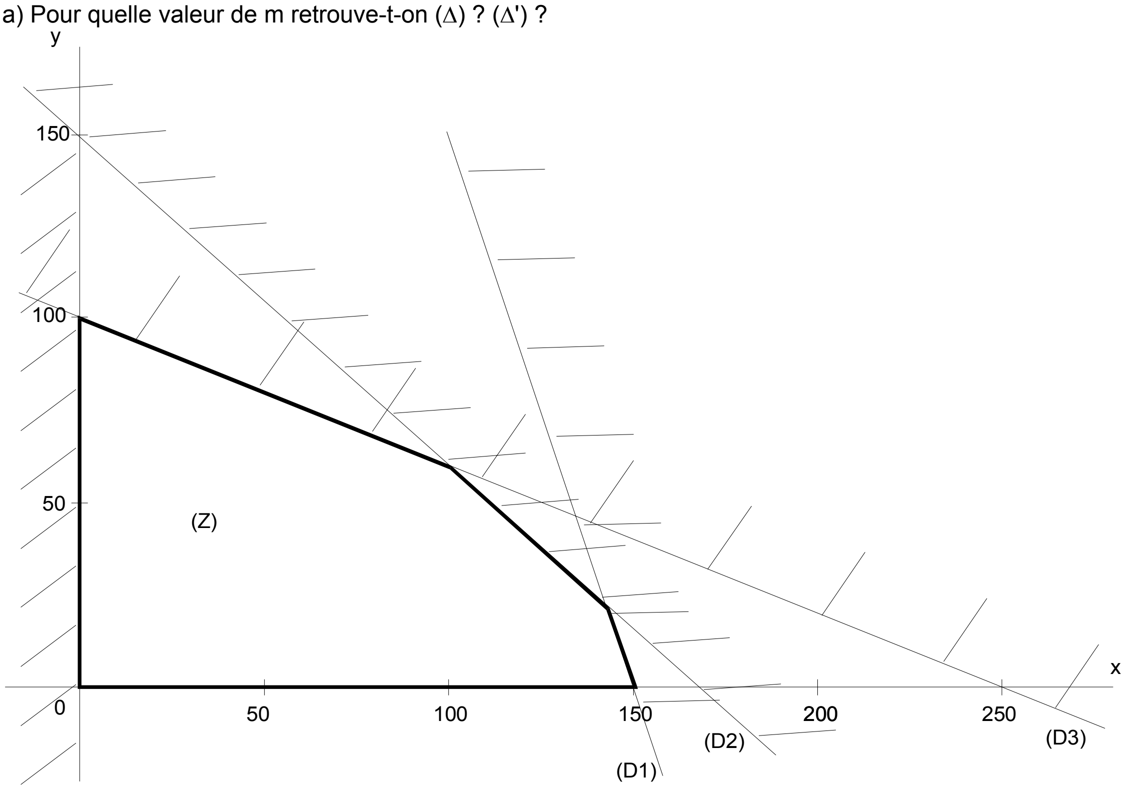
a) Pour quelle valeur de m retrouve-t-on (Δ) ? (Δ') ?

b) Quelle est l'ordonnée à l'origine de (D_m) ?

c) Tracer une des droites (D_m) au-dessus de (Δ') mais ayant au moins un point commun avec la zone (Z).

d) Tracer la droite ayant au moins un point commun avec la zone (Z) et telle que m soit le plus grand possible. Préciser cette valeur ainsi que les coordonnées du point commun de cette droite avec la zone (Z).

e) Déterminer les équations des droites (D_1) (D_2) (D_3). On admet que (D_1) passe par A (140,20).



2°) Application : *Exercice n°2* (feuille quadrillée petits carreaux obligatoire ou papier millimétré)

Une usine fabrique deux types de pièces P_1 et P_2. La fabrication nécessite différentes opérations qui sont effectuées sur deux types de machines M_1 et M_2. Les contraintes de fabrication sont les suivantes :

- pour fabriquer une pièce P_1, il faut 10 heures sur une machine de type M_1 et 8 heures sur une machine de type M_2 ;
- pour fabriquer une pièce de type P_2, il faut 20 heures sur une machine de type M_1 et 4 heures sur une machine de type M_2 ;
- les machines de type M_1 sont disponibles au total 4000 heures par mois ;
- les machines de type M_2 sont disponibles au total 1500 heures par mois.

1) Soit x le nombre de pièces P_1 fabriquées par mois et y le nombre de pièces P_2 fabriquées par mois; Montrer que les contraintes de fabrications se traduisent par le système : $\begin{cases} x + 2y \leq 400 \\ 2x + y \leq 375 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

2) Tracer les quatre droites d'équation :

$x + 2y = 400$, $2x + y = 375$, $x = 0$, $y = 0$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ pour lequel 25 unités graphiques sont représentées par 1 cm.

Hachurer les régions contenant les points dont les coordonnées (x ; y) ne sont pas des solutions du système. Puis sachant que les pièces doivent être fabriquées par groupe de 25, indiquer sur la figure tous les points dont les coordonnées (x ; y) sont des solutions du système.

3) La vente d'une pièce de type P_1 rapporte un bénéfice de 1500 € et la vente d'une pièce de type P_2 rapporte un bénéfice de 1000 €.

a) calculer le bénéfice b en fonction de x et y. Les droites d'équation $1500x + 1000y = b$ sont appelées droites des bénéfices.

b) Construire la droite des bénéfices correspondant à 100000 € de bénéfice et en déduire graphiquement combien de pièces des deux types on doit fabriquer pour obtenir un tel bénéfice.

Faire le même travail pour un bénéfice de 200000 €.

c) expliquer pourquoi les droites de bénéfices sont parallèles.

Pour un bénéfice b, quelles sont les coordonnées du point B, intersection de la droite des bénéfices avec l'axe des ordonnées?

En déduire que plus le bénéfice est grand, plus OB est grand.

d) pour quelle production de pièces des deux types obtient-on un bénéfice maximum ? Quel est ce bénéfice ?

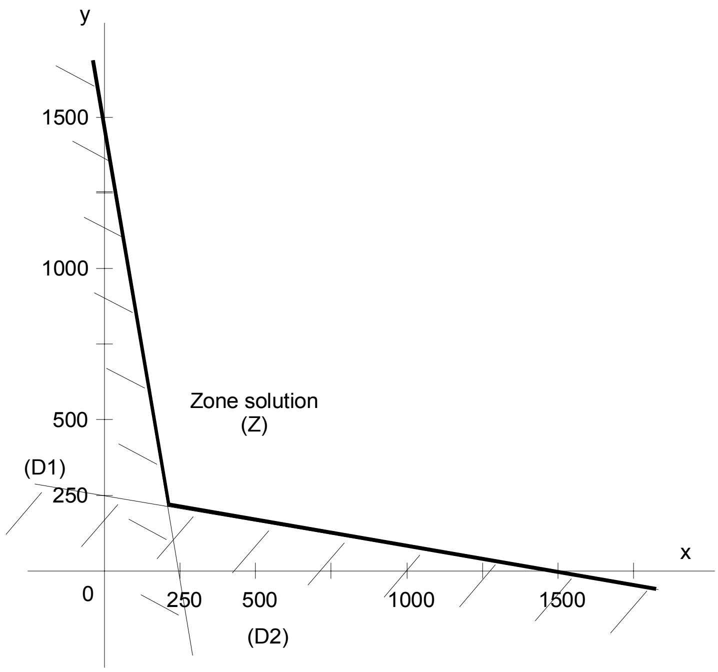
Chapitre n°1 : Programmation linéaire

II) Minimisation :

1°) Principe de minimisation *:*

Exercice n°3

Deux quantités x et y sont soumises à des contraintes dont les droites associées et la zone de solution (Z) sont représentées sur le graphique ci-dessous.



a) Déterminer les équations des droites (D_1) et (D_2). Puis déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
b) Tracer la droite (Δ) d'équation $2x + y = 1500$. Cette droite a-t-elle au moins un point commun avec la zone (Z) ?
c) Tracer la droite (Δ') d'équation $2x + y = 1000$. Que peut-on remarquer entre les droites (Δ) et (Δ') ? Cette droite (Δ') a-t-elle au moins un point commun avec la zone (Z) ?
d) On considère les droites (D_m) d'équation $2x + y = m$
1. Pour quelle valeur de m retrouve-t-on (Δ) ? (Δ') ?
2. Quelle est l'ordonnée à l'origine de (D_m)
3. Tracer la droite ayant au moins un point commun avec la zone (Z) et telle que m soit le plus petit possible. Préciser cette valeur ainsi que les coordonnées du point commun de cette droite avec la zone (Z).

2°) Application *: Exercice n°4*

Pour l'équipement de salles, un organisateur de spectacles doit acheter au minimum 650 chaises pliantes et 330 chaises à accoudoirs.
Deux fabricants lui proposent des lots de 10 chaises composés de la manière suivante :
- l'un, le lot A, comporte 7 chaises pliantes et 3 chaises à accoudoirs, pour 240 €.
- l'autre, le lot B, comporte 6 chaises pliantes et 4 chaises à accoudoirs, pour 250 €.

1) a) On désigne par x le nombre de lots A et par y le nombre de lots B. On suppose donc que $x \geq 0$ et $y \geq 0$.
Traduire la contrainte portant sur le nombre de chaises pliantes par une inéquation. Traduire de même la contrainte sur le nombre de chaises à accoudoirs.
b) Dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité 1 cm pour 10 unités graphiques), représenter la région où les points ont des coordonnées qui vérifient le système de 4 inéquations à deux inconnues obtenu en a) (les droites limitant cette région sont les axes de coordonnées et deux droites désignées respectivement par Δ_1 et Δ_2).
Hachurer la région qui ne convient pas.
c) Calculer les coordonnées du point d'intersection des droites Δ_1 et Δ_2.
2) On souhaite déterminer le nombre de lots de chaque type que doit acheter l'organisateur de spectacles pour que le coût soit le moins élevé possible.
a) Donner une équation de la droite $D_{32\,500}$ correspondant à un coût de 32 500 €.
Tracer cette droite. Quel est son coefficient directeur ? Son ordonnée à l'origine ?
Soit une droite D_c correspondant à un coût inférieur à 32 500 €.
Quel est son coefficient directeur ? Comparer son ordonnée à l'origine à celle de la droite D_{32500} .
b) Tracer la droite correspondant au plus faible coût qui passe par au moins un point de la région non hachurée.
Par quel point cette droite passe-t-elle ?
Préciser le nombre de lots de chaque type à acheter pour obtenir le plus faible coût et calculer la dépense