

CHAPITRE N°..... : REPERAGE DES VECTEURS DU PLAN

\\Portable_hélène\mes documents\Secondes\Cours Secondes\Repérage dans le plan\reperage_vecteurs_plan.doc

I) Repérage dans une base :

1°) Base :

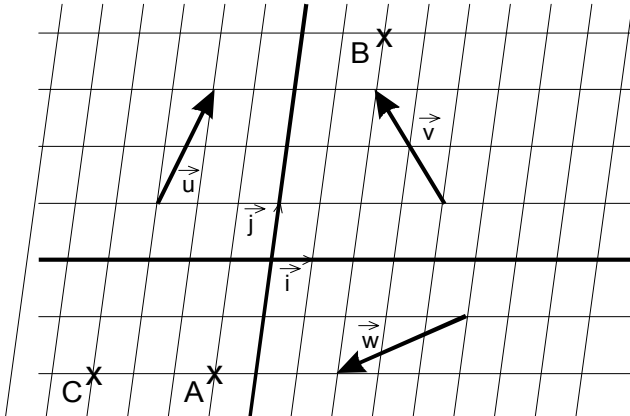
a) Définition :

Deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ **non colinéaires**, pris dans cet ordre forment une base des vecteurs du plan.

On note cette base $(\vec{i}, \vec{j})$.

b) Conséquence : tous les vecteurs du plan pourront être exprimés en fonction de ces deux vecteurs non colinéaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Exercice n°1 : Exprimer un vecteur dans une base.



En effectuant une lecture graphique de la figure, exprimer les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

2°) Coordonnées d'un vecteur dans une base :

a) Théorème :

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base de l'ensemble des vecteurs du plan. Tout vecteur $\vec{u}$ se décompose de manière unique sous la forme $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ (où x et y sont deux nombres réels).

b) Définition :

Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, le vecteur $\vec{u}$, défini par la relation : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ a pour coordonnées $(x; y)$.

x s'appelle l'abscisse du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ et y s'appelle l'ordonnée du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

On écrit simplement $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ou $\vec{u}(x, y)$

c) Savoir lire les coordonnées d'un vecteur sur un graphique et tracer des représentants de vecteurs dont on connaît les coordonnées.

Exercice n°2 : Reprendre la figure 1.

Indiquer les coordonnées des vecteurs dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Tracer un représentant des vecteurs $\vec{z} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{t} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$.

Préciser les coordonnées des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{r}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{x} = 2(\vec{i} + \vec{j}) - 3\vec{j}$; $\vec{y} = -\frac{3}{2}(\vec{i} - \vec{j})$; $\vec{r} = \frac{5}{3}\vec{j}$

Pour s'entraîner exercices n°58 3°) page 153, 74 b) page 155, 82 1°) a) page 156.

II) Coordonnées de vecteurs : propriétés

1°) Activité d'approche : voir exercice n°1 du TD n° ...

Dans tout ce qui suit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

2°) Egalité de vecteurs :

CHAPITRE N°..... : REPERAGE DES VECTEURS DU PLAN

\\Portable_hélène\mes documents\Secondes\Cours Secondes\Repérage dans le plan\reperage_vecteurs_plan.doc

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées. $\vec{u} = \vec{u}' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ \text{et} \\ y = y' \end{cases}$

3°) Somme de vecteurs :

Pour calculer les coordonnées de la somme de deux vecteurs, on ajoute leurs coordonnées : $\vec{u} + \vec{u}' = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

4°) Produit d'un vecteur par un réel :

Si on multiplie un vecteur par k, ses coordonnées sont multipliées par k. $k\vec{u} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

5°) Application :

Exercice n°3 : Soit les vecteurs $\vec{u} = 6\vec{i} - 2\vec{j}$ et $\vec{u}'(7 ; 4)$. Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{u} + \vec{u}'$, $3\vec{u}'$, $\frac{1}{2}\vec{u} - 3\vec{u}'$

Pour s'entraîner : exercice n°81 page 156.

6°) Colinéarité de deux vecteurs.

a) **Exercice n°4 :** Donner trois vecteurs colinéaires au vecteur $\vec{u}(-\frac{2}{3}, 2)$

b) Activité d'approche : voir exercice n°2 du TD n° . . .

c) Théorème :

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$:

$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$

d) Application : reconnaître des vecteurs colinéaires (méthode L page 143)

Exercice n°5 : Soient les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{u}' \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = 1,5\vec{i} + 2\vec{j}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont-ils colinéaires ? Et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$?

Pour s'entraîner : exercice n°67 et 68 page 154.

III) Repère du plan :

1°) Repère

Définition : On appelle repère cartésien tout triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel :

- O est un point du plan, appelé origine du repère

- $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base du plan

L'axe $(O, \vec{i})$ est appelé « axe des abscisses » et l'axe $(O, \vec{j})$ « axe des ordonnées »

2°) Coordonnées d'un point d'un vecteur :

a) Propriété :

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan et M un point quelconque

Les trois phrases suivantes sont équivalentes :

- $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

-Le point M a pour couple de coordonnées (x , y)

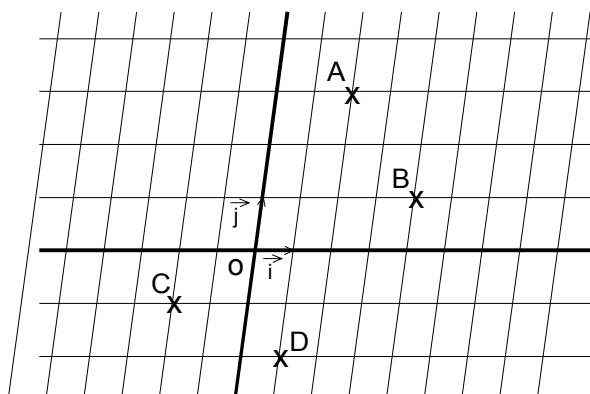
-Le vecteur $\vec{OM}$ a pour couple de coordonnées (x ,y).

b) Déterminer des coordonnées dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

CHAPITRE N°..... : REPERAGE DES VECTEURS DU PLAN

\\Portable_hélène\mes documents\Secondes\Cours Secondes\Repérage dans le plan\reperage_vecteurs_plan.doc

Exercice n°6 :



On considère le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

♦ Placer le point M tel que $\vec{OM} = \vec{i} + 2\vec{j}$. Quels sont les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$?

♦ Placer le point P tel que $\vec{AP} = -2\vec{i} - \vec{j}$

♦ Exprimer les vecteurs $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ et $\vec{OD}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

♦ Même énoncé pour les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{BA}$, $\vec{AC}$, $\vec{CA}$, $\vec{CD}$ et $\vec{DC}$.

Pour s'entraîner : exercices n°58 page 153.

c) Déterminer des coordonnées dans un repère autre que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (Méthode I page 141) : exercice n°61 page 153

Pour s'entraîner : exercices n°76 page 155, 78 page 156, 88 1°) 89 2°) et 91 page 157.

3°) Coordonnées d'un vecteur $\vec{AB}$ et coordonnées du milieu d'un segment

a) Théorème :

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, si les coordonnées des points A et B sont (x_A, y_A) et (x_B, y_B) alors :

- Le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

- Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$.

b) **Exercice n°7** : Soient A (-2 ; 4), et C (4 ; 6) dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{AC}$, et les coordonnées du milieu I de [AC]

Pour s'entraîner : exercices n°80 page 156

4°) Démontrer avec des coordonnées (méthode J page 141) : exercice n°63 page 153

Pour s'entraîner : exercices n°64 1°) page 154

5°) Calculer les coordonnées d'un point (méthode K page 141) :

Exercice n°8 : Soient A (-2 ; 4), B (-3 ; 5) et C (4 ; 6) dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Faire une figure

a) Calculer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme .

b) Calculer les coordonnées du point M tel que : $\vec{AM} + 2\vec{BM} + 3\vec{CM} = \vec{0}$

c) Calculer les coordonnées du point N symétrique de A par rapport à C

Pour s'entraîner : exercices n°65 et 66 page 156 et 85 page 157 exercices n°80 page 156 et 85 page 157

6°) Coordonnées et colinéarité : (Montrer un alignement et un parallélisme)

Exercice 9 : Les points A , B , C sont-ils alignés ?

a) A (2 ; 3), B (5 ; 7), C (-7 ; -9).

b) A (5 ; 7), B (0 ; 1) et C (- $\frac{3}{4}$, 0).

Exercice 10 : Les droites (AB) et (CD) sont - elles parallèles ?

a) A (2 ; 1), B (5 ; -3), C (0 ; 3) et D (6 ; -5).

b) A (- $\frac{5}{2}$; $\frac{7}{2}$), B ($\frac{3}{2}$; $\frac{1}{2}$), C (5 ; -2) et D (-1 ; $\frac{5}{2}$)

Exercice 11 : Soit $\vec{m} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} x+3 \\ 2x-5 \end{pmatrix}$. Trouver x pour que $\vec{m}$ et $\vec{n}$ soient colinéaires . Trouver alors le réel k tel que $\vec{m} = k \vec{n}$.

Pour s'entraîner : exercices n°69, 70 et 71 page 154. n°87 à 89 page 157

IV) Cas particulier le repère orthonormal

1°) Base orthogonale :

CHAPITRE N°..... : REPERAGE DES VECTEURS DU PLAN

\\Portable_hélien\mes documents\Secondes\Cours Secondes\Repérage dans le plan\reperage_vecteurs_plan.doc

Définition : une base $(\vec{i}, \vec{j})$ des vecteurs du plan est orthogonale lorsque les directions des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont perpendiculaires.

2°) **Norme d'un vecteur** (rappel) : une unité de longueur est choisie dans le plan

a) Définition : soit $\vec{u}$ un vecteur, A et B deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

On appelle norme du vecteur $\vec{u}$ la longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$. On note $\|\vec{u}\| = AB$ et on lit "la norme du vecteur $\vec{u}$ est égale à la distance AB". En particulier $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$

b) Vecteur unitaire : on appelle vecteur unitaire (ou vecteur normé) tout vecteur de norme 1.

3°) Base orthonormale , repère orthonormal

Définition : une base $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormale (ou encore orthonormée) lorsqu'elle est orthogonale et que $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont unitaires.

Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormal (ou orthonormé) lorsque la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormale.

Autrement dit :

$$(O, \vec{i}, \vec{j}) \text{ orthonormé signifie } \begin{cases} \vec{i} \perp \vec{j} \\ \text{et} \\ \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \end{cases}$$

C'est à dire: les axes de coordonnées sont perpendiculaires et on utilise la même unité pour graduer les deux axes

4°) Norme d'un vecteur, distance de deux points

a) Propriété: calcul de la norme d'un vecteur

Soit un vecteur $\vec{u}$ de couple de coordonnées (x, y) dans une base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j})$, on a $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) Savoir calculer la norme de vecteurs en base orthonormale.

Exercice n°12 : Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormale du plan. Soient les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Faire une figure. Calculer $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{w}\|$.

5°) Distance de deux points

a) Propriété: calcul de la distance de deux points

La propriété précédente généralise la relation déjà utilisée au collège:

Soit deux points A (x_A, y_A) et B (x_B, y_B) dans un repère orthonormal $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

b) Savoir calculer des distances en repère orthonormal (voir méthode N page 143)

Exercice n°13 : Placer les points A (1,2), B (3,-1) et C (9,3) dans un repère orthonormal. Le triangle ABC est-il rectangle ?

Pour s'entraîner exercices n°72 et 73 page 143, exercices n°95 à 98 page 158