CHAPITRE….. : GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Pourquoi les fonctions ?

On dit souvent des nombres qu'ils sont partout.
On peut aussi dire que les fonctions sont partout. Elles constituent un outil privilégié pour traduire des situations issues de notre environnement. Ces situations peuvent être d'ordre scientifique, économique, linguistique, artistique.

I) Vocabulaire

1°) Activité d'approche : voir activité 2 page 81 (faite à l'oral en classe).

2°) Fonction numérique d'une variable réelle .

a) Exemple : Soit la fonction f définie sur [-4 ; 4] par f(x) = $-3x^2+1$.
Son ensemble de définition est donné par l'énoncé ; D = [-4 ; 4].
L'image de –1 est f(-1) = -2.

b) Définition :

> Soit D une partie de l'ensemble ℝ des réels.
> On définit une fonction numérique f sur D à valeurs dans ℝ quand à chaque réel x de D on associe un réel et un seul, appelé image de x.

c) Notation :

> $f : D \to \mathbb{R}$
> $\quad x \mapsto y = f(x)$
> x est appelé la **variable**, y est l'image de x par f. D est appelé l'**ensemble de définition** de la fonction f.

d) Remarque : dans la notation f(x), les parenthèses n'ont pas la même signification que dans un calcul algébrique.

3°) Savoir calculer une image à partir d'une expression algébrique (méthode voir A page 83) et savoir établir un tableau de valeurs:

Exercice n°1 : Soit la fonction f définie sur [0 ; 5] par : f(x) = $\dfrac{3x^2}{x+1}$.

a) Sans calculatrice : calculer à la « main » les images par la fonction f de 1, $\sqrt{2}$, $\dfrac{2}{3}$.

b) Avec calculatrice : Compléter le tableau de valeurs suivant (si nécessaire voir méthodes ci dessous).

Valeurs de x	0	1	2	3	4	5
Valeurs de f(x)						

• Méthode pour entrer l'expression de la fonction.

> **Texas** : touche $\boxed{\text{Y=}}$ et sur la ligne $\boxed{\text{Y1}}$ taper l'expression de la fonction en utilisant la touche $\boxed{\text{X, T, }\theta}$ chaque fois qu'apparaît la variable x
> **Casio** : ouvrir le menu GRAPH et sur la ligne $\boxed{\text{Y1}}$ taper l'expression de la fonction en utilisant la touche $\boxed{\text{X, T, }\theta}$ chaque fois qu'apparaît la variable x

• Méthode pour dresser le tableau de valeurs de la fonction sur l'intervalle [0, 5] avec un pas égal à 1.

> **Texas** : ouvrir le menu $\boxed{\text{Table Setup}}$ à l'aide de la touche seconde $\boxed{\text{Tblset}}$. Choisir la première valeur de la table (TblStart ou TBLMin) et le pas de la table $\boxed{\Delta\text{Tbl}}$. Sélectionner ensuite Auto pour Indpnt et Auto pour Depend. On obtient la table avec la touche seconde $\boxed{\text{TABLE}}$
>
> **Casio** : ouvrir le menu Table en sélectionnant l'icône $\boxed{\text{TABLE}}$, suivi de $\boxed{\text{EXE}}$. Touche $\boxed{\text{QUIT}}$ si nécessaire.
> On accède au menu $\boxed{\text{RANG}}$ à l'aide de la touche F3 ou F5. Dans le menu $\boxed{\text{Table Range}}$, on choisit la première valeur de la table (Strt) , la dernière valeur (End) et le pas de la table $\boxed{\text{ptch}}$. On tape Exe entre chaque valeur, puis EXIT ou QUIT pour revenir à l'écran précédent. On obtient la table en choisissant le menu TABL(touche F6 ou F4).

Pour s'entraîner : exercices n°17 à 19 page 93.

4°) Savoir déterminer des valeurs interdites :

Exercice °2 : au réel x on associe, si possible, le réel $\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$.

Parmi les valeurs de x suivantes, reconnaître celles qui ont une image (que l'on calculera) et celles qui n'en ont pas, appelées valeurs interdites :
a) -2, b) 4, c) 1, d) 0.

Contrôler les résultats obtenus avec la calculatrice : entrer $\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ en Y1 et vérifier que le tableau de valeur indique ERROR pour les valeurs interdites.

5°) Courbe représentative :

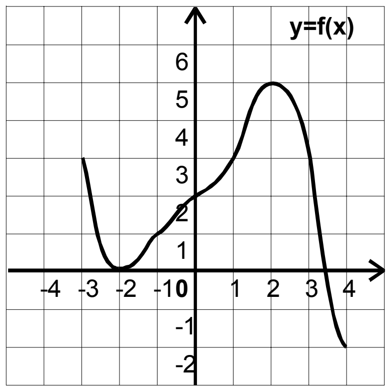
a) Définition :

Un repère du plan étant choisi, la courbe représentative (ou représentation graphique) de la fonction f, notée $C_{f,}$, est l'ensemble de tous les points d'abscisse x et d'ordonnée f(x) pour x élément de D.

Exemple : Représentation graphique de la fonction f définie sur [-4 , 4] par f(x) = x^2

b) Savoir déterminer des images par lecture graphique (méthode voir B p 83)

Exercice n°3 *:* La courbe ci-contre représente une fonction f définie sur l'intervalle [-3 ; 4]



Déterminer par lecture graphique les images de -3 ; 0 et 2 par f.

Pour s'entraîner : exercices n°12,13 page 93, 20 et 21 page 94

c) Remarque : Toute courbe ne représente pas forcement une fonction
Voir exercice n°14 page 93

6°) Utiliser une calculatrice pour obtenir une courbe :

Exercice n°4 : On considère la fonction f définie sur [-3 , 3] par f(x) = $\frac{-2x}{x^2+1}$

a) Sans utiliser la calculatrice, calculer f(x) pour les valeurs de x suivantes : 0 ; 1 ; -2 et 3.
b) En déduire si les points suivants sont situés sur la représentation graphique de f :

O (0 ; 0) ; A (1 ; $-\frac{1}{6}$) ; B (-2 ; $\frac{-6}{5}$) ; C (3 ; - 0,6).

c) En utilisant la calculatrice, dresser le tableau de valeurs de la fonction sur l'intervalle [-3 , 3] avec un pas égal à 1 (pour la marche à suivre : voir exercice 1)

d) Choisir une fenêtre d'affichage :

Texas : appuyer sur la touche Window et taper les valeurs minimales et maximales de x et y en se déplaçant avec les flêches verticales du curseur (ici Xmin : -3 ; Xmax : 3 ; scale : 1 ; Ymin : -2 ; Ymax : 2 ; scale 1). **Casio** : appuyer sur la touche shift puis F3. dans le menu V-Window et taper les valeurs minimales et maximales de x et y en se déplaçant avec les flêches verticales du curseur (ici Xmin : -3 ; Xmax : 3 ; scale : 1 ; Ymin : -2 ; Ymax : 2 ; scale 1).

e) Visualiser sur la calculatrice la courbe C représentative de la fonction f :

Texas : appuyer sur la touche $\boxed{\text{GRAPH}}$ **Casio** : dans le menu $\boxed{\text{GRAPH}}$ appuyer sur la touche correspondant à $\boxed{\text{DRAW}}$

f) Placer dans une repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (prendre 2 cm comme unité sur l'axe des abscisses et 4 cm comme unité sur l'axe des ordonnées) , les 7 points correspondant au tableau de valeurs plus les 2 points d'abscisses -0,5 et 0,5.
Tracer la courbe représentative de f . Que pouvez vous dire de la représentation graphique ?

g) Résoudre par le calcul f(x) = 1. Obtiens-t-on le même résultat par lecture graphique ?

7°) Trouver graphiquement l'ensemble de définition d'une fonction. (Voir méthode C page 83 et les conventions graphiques page 82)

Exercice n°5 : exercice n°15 page 93. *Pour s'entraîner :16 page 93, 22 et 23 page 94, 28, 29 page 95.*

II) Sens de variation d'une fonction (voir livre page 84):

1°) Définitions :

a) Fonction croissante :

Une fonction f est croissante sur un intervalle I lorsque f conserve l'ordre, c'est à dire : quels que soient les réels x_1 et x_2 de I, si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$.

b) Fonction décroissante :

Une fonction f est décroissante sur un intervalle I lorsque f inverse l'ordre, c'est à dire
quels que soient les réels x_1 et x_2 de I, si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$.

f est une fonction monotone sur un intervalle I si f est soit croissante soit décroissante sur I

c) Extremum d'une fonction.

f admet un maximum sur un intervalle I en x_0 ($x_0 \in$ I) si et seulement si pour tout réel x de I, on a : $f(x) \leq f(x_0)$.
f admet un minimum sur un intervalle I en x_0 ($x_0 \in$ I) si et seulement si pour tout réel x de I, on a : $f(x) \geq f(x_0)$.

d) Applications directes : ***exercice n°31page 96***. *Pour s'entraîner n°32 , 34 page 96*

2°) Justifier l'existence d'un extremum (voir méthode F page 85)

Exercice n°6 : Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = 4x^2 - 4x + 5$.

a) A l'aide de la calculatrice, déterminer le minimum de f :

• Obtenir la fenêtre standard :

Texas : menu $\boxed{\text{ZOOM}}$ puis $\boxed{\text{ZSTANDARD}}$ et $\boxed{\text{ENTER}}$.
Casio : menu $\boxed{\text{V-WINDOW}}$ puis sélectionner la fenêtre standard en tapant sur $\boxed{\text{STD}}$ ou $\boxed{\text{INIT}}$ Puis $\boxed{\text{EXIT}}$ pour revenir au menu précédent (graph func) et $\boxed{\text{DRAW}}$

• Utiliser les fonctions $\boxed{\text{TRACE}}$ et $\boxed{\text{ZOOM}}$ des calculatrices pour la recherche d'un extremum :

Texas : la courbe étant affichée à l'écran, sélectionner la fonction TRACE. Une croix apparaît sur la courbe et les coordonnées du point de la courbe correspondant à cette croix s'affichent en bas de l'écran. Déplacer la croix à l'aide des touches horizontales du curseur.
Appuyer sur la touche $\boxed{\text{ZOOM}}$. Choisir le menu $\boxed{\text{Zbox}}$ suivi de $\boxed{\text{ENTER}}$: il va permettre de délimiter un rectangle qui correspond à la partie de la courbe à agrandir.
Placer la croix clignotante avec le curseur à un coin du rectangle désiré, taper $\boxed{\text{ENTER}}$, puis aller au coin opposé du rectangle avec les touches du cursreur. On termine par $\boxed{\text{ENTER}}$. Puis utiliser la fonction $\boxed{\text{TRACE}}$
Casio : la courbe étant affichée à l'écran, sélectionner la fonction TRACE avec la touche shift suivie de F1. Une croix apparaît sur la courbe et les coordonnées du point de la courbe correspondant à cette croix s'affichent en bas de l'écran. Déplacer la croix à l'aide des touches horizontales du curseur
La courbe étant affichée à l'écran, activer le menu ZOOM (touche F2).
Choisir le menu BOX (touche F1), ce qui va permettre de délimiter un rectangle qui correspond à la partie de la courbe à agrandir.
Placer la croix avec le curseur à un coin du rectangle désiré, taper $\boxed{\text{EXE}}$, puis aller au coin opposé du rectangle avec les touches du curseur. On termine par $\boxed{\text{EXE}}$. Puis utiliser la fonction $\boxed{\text{TRACE}}$

b) Démontrer par le calcul que 4 est le minimum de f sur ℝ. Pour quelle valeur de x est-il atteint ?

Pour s'entraîner : exercices n°43 à 46 page 97.

3°) Utilisation de la calculatrice pour déterminer la valeur approchée d'un extremum :

Exercice n°7: On considère la fonction f définie sur] 0 ; 10 [par : $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$.

On admet que cette fonction possède sur] 0 ; 10 [un minimum en a.
a) Visualiser sur la calculatrice la courbe C représentative de la fonction f en prenant comme fenêtre d'affichage :
Xmin : 0 ; Xmax : 10 ; scale : 1 ; Ymin : 0 ; Ymax : 10 ; scale 1.
Déterminer graphiquement deux entiers naturels consécutifs b et c vérifiant b < a < c.

b) A l'aide de la calculatrice, compléter le tableau de valeur suivant (on donnera des valeurs approchées à 10^{-3} près).

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
f(x)											

En déduire un encadrement de a d'amplitude 0,1 ou 10^{-1}.

c) En utilisant la calculatrice, dresser le tableau de valeurs de la fonction sur l'intervalle [1,4 ; 1,44] avec un pas égal à 0,01.

x	1,4	1,41	1,42	1,43	1,44
f(x)					

En déduire un encadrement de a d'amplitude 0,01 ou 10^{-2}.
d) Déterminer l'image du nombre $\sqrt{2}$ par f . On admettra que a = $\sqrt{2}$. Quelle est la valeur exacte du minimum de la fonction ?

Facultatif : montrer que pour tout x de] 0 ; 10 [, $f(x) - f(\sqrt{2}) = \frac{(x-\sqrt{2})^2}{2x}$. En déduire que a = $\sqrt{2}$

Remarque : la table d'une calculatrice permet de déterminer un encadrement de a mais elle ne permet pas de déterminer sa valeur exacte.

4°) Tableau de variation

a) Définition :

Etudier le sens de variation d'une fonction consiste à déterminer les intervalles de l'ensemble de définition sur lesquels la fonction est strictement croissante ou décroissante.
Les résultats peuvent être consignés dans un tableau appelé t**ableau de variation.**

b) Savoir déterminer les variations d'une fonction d'après sa représentation graphique (voir méthode D p 85)

Exercice n°8 : Reprendre la fonction étudiée dans l'exercice n°4 (ou encore exercice n°12 ci dessous)
Indiquer par lecture graphique le sens de variation de f sur cet intervalle et dresser son tableau de variation.
Déterminer par lecture graphique le minimum et le maximum de f sur l'intervalle [-3 ; 4] et préciser en quelles valeurs ils sont atteints.

Exercice n°9 : On considère la fonction f définie sur [-10 ; -3 [$\cup$] –3 , 5] par f(x) = $\frac{2}{x+3}$.

Afficher sur l'écran de la calculatrice la courbe représentant f. Utiliser le fenêtre : x $\in$ [-10 ; 5] et y$\in$ [-5 ; 5].
Indiquer par lecture graphique le sens de variation de f sur [-10 ; -3 [$\cup$] –3 , 5] et dresser son tableau de variation.
Pour s'entraîner : exercices n°36 à 38 page 96,47 à 49 page 97

Exercice n°94 page 107 (cas où la calculatrice ne permet pas de déterminer la valeur exacte d'un extremum) .

c) Savoir construire plusieurs courbes possibles à partir d'un tableau de variation :

Exercice n°10 : exercice n°53 page 98. *Pour s'entraîner : exercices n°54 et 55 page 97*

d) Savoir dresser plusieurs tableaux de variation possibles d'une fonction à partir d'un tableau de valeurs :

Exercice n°11 : Soit f une fonction définie sur [-5 ; 4] dont on donne le tableau de valeurs :

x	-5	-4	-1	0	2	4
f(x)	-2	0	2	1	-3	2

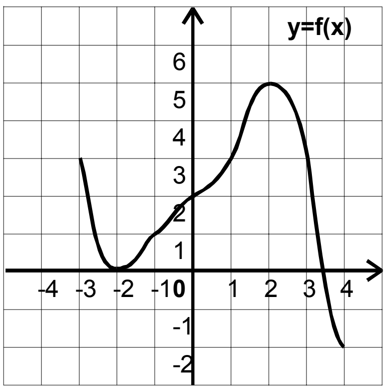
Dresser un tableau de variation possible pour la fonction f.
Y a t'il d'autres tableaux de variation possibles ?

III) Antécédents, équations

1°) Antécédents

a) Définition : Soit f une fonction définie sur un ensemble D.
Si le réel x a pour image y, on dit que x est un **antécédent** de y par f.

b) Savoir déterminer des antécédents par lecture graphique (voir méthode G page 87).
Exercice n°12 :



La courbe ci-contre représente une fonction f définie sur l'intervalle [-3 ; 4]

Déterminer par lecture graphique le (ou les) antécédent(s) s'il(s) existe(nt) de -2 , 3 et -2,5 par f.

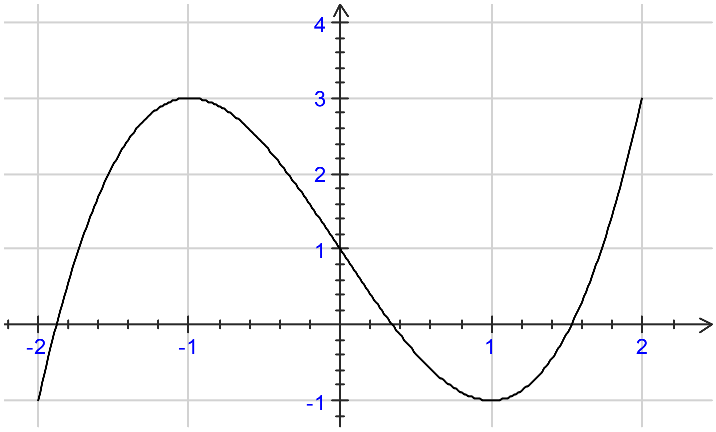
Pour s'entraîner : exercices n°64 à 69 page 100 et 101.

c) Savoir déterminer des images ou antécédents à partir d'une expression algébrique.

Exercice n°13 : On considère la fonction f définie sur ℝ par f(x) = $3x^2$ - 6x + 4

• Déterminer f(-2), f(0), Déterminer l'image du nombre $\frac{\sqrt{2}}{3}$ par f

• Pour quelles valeurs de x a-t-on : f(x) = 1 ? Déterminer les antécédents du nombre 4 par la fonction f.



Donner l'antécédent de 2 par f.
Donner l'antécédent de 1,7 par f

d) Savoir déterminer des images ou antécédents à partir d'un tableau de variation.

Exercice n°14 **:** on donne le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle [1 ; 2].

x	1	1,3	1,7	2
Variation de f	2 ↘	1,7 ↘	1,5 ↘	-1

Donner l'image de 2 par f.
Donner l'image de 1,7 par f.

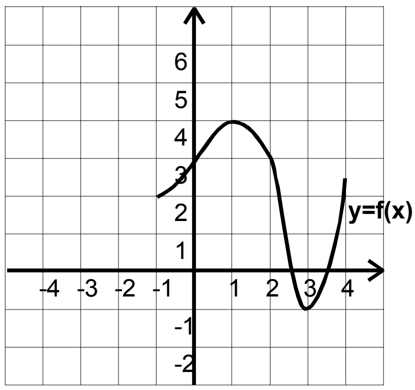
e) Savoir reconnaître différentes écritures d'une même fonction et choisir la forme la plus adaptée au travail demandé

Exercice n°15 : Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = (2x+3)^2 - (2x+3)(5-x) - 4x^2 + 9$

Partie A : sans la calculatrice.
a) Développer, réduire et ordonner f(x)
b) Factoriser f(x).
c) calculer l'image de $-\frac{5}{4}$ puis de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ par f.
d) Déterminer par le calcul les antécédents du nombre 3 par f.
e) Déterminer par le calcul les abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses.
f) On admet que le sens de variation de f ne change qu'une fois entre –5 et 3 pour la valeur –1,25 de x.
En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [-5, 3], expliquer.
Partie B : avec la calculatrice
a) Dresser un tableau de valeurs de la fonction f sur l'intervalle [-5, 3],avec un pas égal à 1.
b) Tracer la courbe représentative de f dans une repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (prendre 1 cm comme unité sur l'axe des abscisses et 0,25 cm comme unité sur l'axe des ordonnées) .
c) Retrouver graphiquement le résultat de la partie A d) et e).

2°) Savoir résoudre graphiquement (et rédiger) une équation du type f(x) = a (voir méthode H page 87)

Exercice n°16 : On considère la fonction f dont on donne la courbe représentative C_f ci-contre.
a) Résoudre graphiquement l'équation (E) : f(x) = 3.
b) Déterminer graphiquement l'antécédent de –1.
c) Déterminer graphiquement l'antécédent de 4.
d) Résoudre graphiquement l'équation : f(x) = -2.
e) Résoudre graphiquement l'équation : f(x) = 4.
Pour s'entraîner exercices n°70 à 72 page 101



IV) Inéquations et signe

1°) Savoir résoudre graphiquement (et rédiger) une inéquation du type f(x) ≤a (voir méthode I page 89)

Exercice n°17 **:** On considère la fonction f de l'exercice n°16.
a) Résoudre graphiquement l'inéquation (I) : f(x) ≤ 3 .
b) Résoudre graphiquement l'inéquation (I) : f(x) ≥ 4 . c) Résoudre graphiquement l'inéquation (I) : f(x) < -1 .
Pour s'entraîner exercices n°80 à 82 page 103.

2°) Signe d'une fonction :

a) Définition :

Une fonction f est positive sur un intervalle I lorsque, pour tout réel x de I, on a f(x) ≥ 0.
Une fonction f est négative sur un intervalle I lorsque, pour tout réel x de I, on a f(x) ≤ 0.

b) Savoir lire graphiquement le signe d'une fonction (voir méthode J page 89) :

Exercice n°18 : exercice n°83 page 104. *Pour s'entraîner : exercices n°84 à 85 page 104.*

V) Mettre en relation l'expression algébrique et la courbe représentative d'une fonction

Exercice n°19*:* Soit (O ; I ; J) un repère orthogonal et C la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle [-2 ; 2].

A. Première partie

a) A l'aide de la courbe C représentative de la fonction f, recopier et compléter le tableau de valeurs ci-après par lecture graphique :

x	-2	-1	0	1	2
f(x)					

b) Donner, s'il (s)existe(nt)les antécédents de –4, de 0 et de 3.

c) Indiquer le sens de variation de la fonction f.
Dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle [-2 ; 2].

d) Résoudre graphiquement, en expliquant la méthode, les équations suivantes : f(x) = 1 et f(x) = 3.

e) Discuter, suivant les valeurs de k (k étant réel), le nombre de solutions de l'équation f(x) = k.

f) Résoudre graphiquement les inéquations f(x) >0 et f(x) $\leq$ 3.

B. Seconde partie : La courbe C représentée sur le graphique ci-dessus est celle de la fonction f définie dans l'intervalle [-2 , 2] par : $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

a) Déterminer par le calcul les images de $\frac{2}{3}$ et $\sqrt{2}$ par f.

b) Déterminer algébriquement les antécédents du nombre 1 par la fonction f.

VI) Comparaison de fonctions :

1°) Egalité de deux fonctions :

a) Définition :

les fonctions f et g sont égales sur D si et seulement pour tout réel x de D on a f(x) = g(x)

b) application : *exercice n° 20 :* Démontrer que les fonctions f et g définies sur]-2, +∞ [respectivement par :

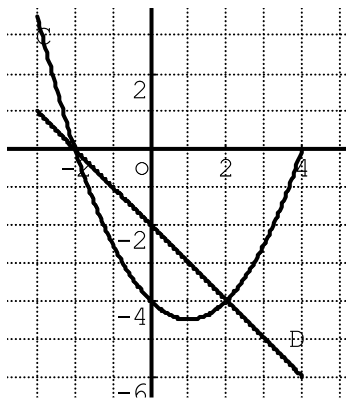
$f(x) = \frac{-2x^2 - 3x + 5}{x + 2}$ et g(x) = $-2x + 1 + \frac{3}{x + 2}$ sont égales.

c) Remarque :
Il ne faut pas confondre

Egalité de f et g sur D (l'égalité est vérifiée pour tous les réels x de D) et Equation f(x) = g(x) sur D (on cherche les réels x de D qui vérifient l'égalité)

2°) Etudier la position relative de deux courbes :
a) Par Lecture graphique :
Exercice n°21 :
Les fonctions f et g sont respectivement définies sur [-3 ; 4] par les courbes C et D
Utiliser ce graphique pour répondre aux questions suivantes :

- ♦ f(x) = g(x)
- ♦ f(x) < g(x)



b) Par le calcul
Suite de l'exercice n°21 : Les fonctions f et g sont respectivement définies sur [-3 ; 4] par

$f(x) = \frac{x^2}{2} - x - 4$ et g(x) = - x – 2 .

- ♦ Calculer f(x) – g(x)
- ♦ Vérifier que f(x) – g(x) = $\frac{(x - 2)(x + 2)}{2}$
- ♦ Résoudre l'équation f(x) = g(x) et retrouvez le résultat obtenu graphiquement

VII) Calculatrice et fonction : ce qu'il faut savoir faire

1°) Représenter une fonction
2°) Dresser une table valeurs de la fonction
3°) Choisir une fenêtre d'affichage
4°) Revenir à la fenêtre standard
5°) Utiliser la fonction trace
6°) Utiliser la fonction ZOOM

Pour s'entraîner : exercices n°74 à 76 page 102. Voir feuille polycopiée jointe (Indice seconde édition 2004 page 66)