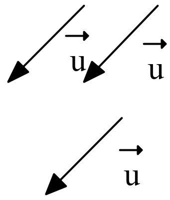
CHAPITRE …. : LES VECTEURS DU PLAN

I) Caractérisation d'un vecteur :

1°) Définition : Un vecteur est caractérisé par sa direction, son sens et sa longueur.
Un vecteur peut se noter $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ….
La longueur du vecteur $\vec{u}$ s'appelle la norme de $\vec{u}$. On note $\|\vec{u}\|$



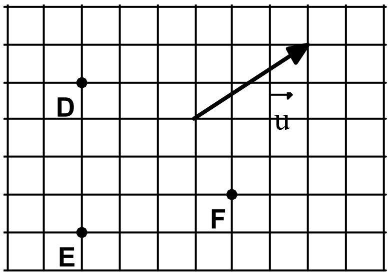
2°) Représentation d'un vecteur :

Un vecteur n'a pas d'origine déterminée ; il peut prendre comme origine un point quelconque du plan.
Ci-contre plusieurs représentations du vecteur $\vec{u}$

Pour s'entraîner exercice A page 132.

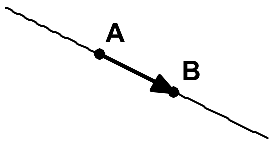
3°) Savoir représenter un vecteur d'origine donnée.

Exercice n°1 : Soit le vecteur représenté $\vec{u}$ ci-après :
Tracer une représentation du vecteur $\vec{u}$ d'origine D, E et F.



4°) Vecteur $\overrightarrow{AB}$

Définition : Soit A et B deux points distincts du plan.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur défini par :
Sa direction : celle de la droite (AB).
Son sens : de A vers B.
Sa norme (sa longueur) : c'est la longueur AB.

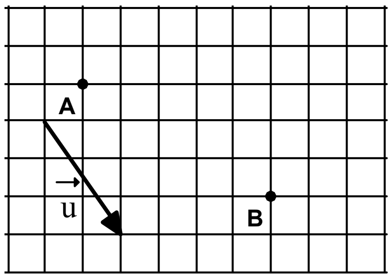


5°) Opposé d'un vecteur :
a) Définition : l'opposé d'un vecteur $\vec{u}$ est le vecteur $-\vec{u}$, de même direction et de même norme que $\vec{u}$, mais de sens opposé à celui de $\vec{u}$.

b) Savoir représenter un vecteur et son opposé :

Exercice n°2 : Soit le vecteur représenté $\vec{u}$ ci-après :
Tracer une représentation du vecteur $\vec{u}$ d'origine A et une représentation du vecteur $-\vec{u}$ d'origine B.

Pour s'entraîner : exercice n°1 page 146.

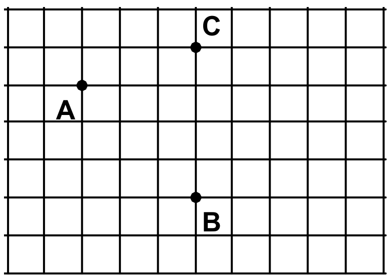


6°) Vecteur nul :
Le vecteur de norme nulle est appelé le vecteur nul ; il est noté $\vec{0}$. Il n'a ni sens ni direction.
Ainsi : $\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$

II) Egalité de deux vecteurs

1°) Définition :
Dire que deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux signifie :
- qu'ils ont même direction (les droites (AB) et (CD) sont parallèles)
- qu'ils ont même sens
- qu'ils ont même longueur

2°) *Exercice n°3 :* sur la figure ci-contre, placer le point D tel que : $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$



3°) Autre formulation de l'égalité vectorielle :

A, B, C et D sont quatre points non alignés.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si ABDC est un parallélogramme.

4°) Propriété caractéristique du milieu :

Dire que I est le milieu de [AB] signifie que $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

5°) Application : *Exercice n°4*

QCM :

a) REMI est un parallélogramme.
Indiquer un vecteur égal à $\overrightarrow{MI}$ — $\overrightarrow{RE}$ — $\overrightarrow{EM}$ — $\overrightarrow{IR}$ — $\overrightarrow{ER}$

b) Parmi ces égalités, laquelle indique que E est le milieu de [GH] — $\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{HE}$ — $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{HE}$ — $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EH}$ — $\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{GE}$

c) MNPQ est un parallélogramme. Quelle égalité de vecteurs peut-on en déduire ? — $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{PQ}$ — $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MQ}$ — $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{QN}$ — $\overrightarrow{QM}=\overrightarrow{NP}$

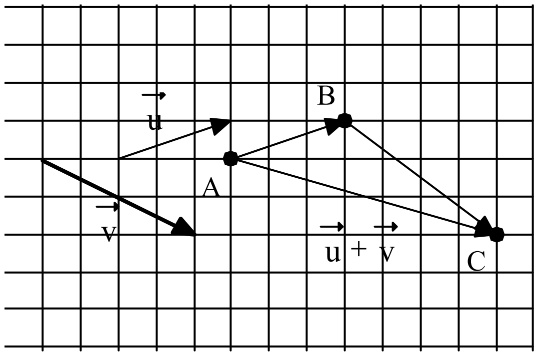
6°) Propriétés caractéristiques de l'égalité vectorielle

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, la translation qui transforme A en B transforme aussi C en D.
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, ABDC est un parallélogramme.
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, [AD] et [BC] ont même milieu.

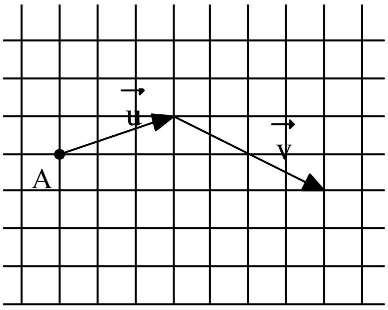
Pour s'entraîner : exercices n°4 et 5 a) à e) page 146, 11 page 147.

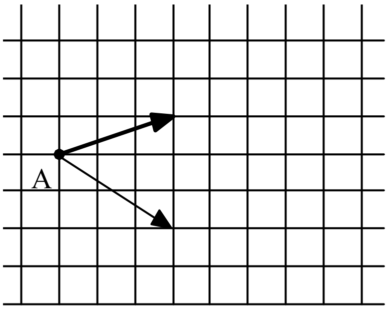
III) Addition des vecteurs

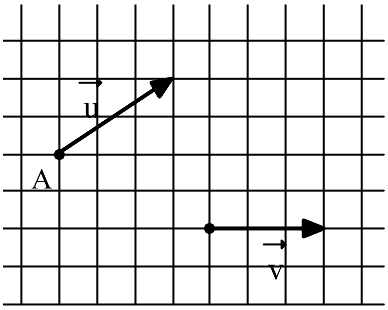
1°) Définition : La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u}+\vec{v}$, défini de la manière suivante :
A étant un point quelconque, on place le point B tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, puis le point C tel que $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$ alors $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

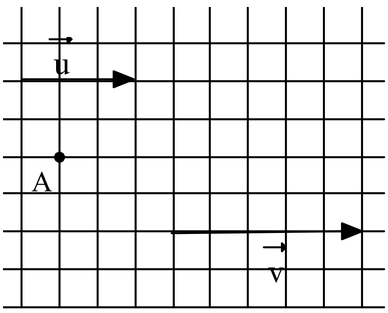


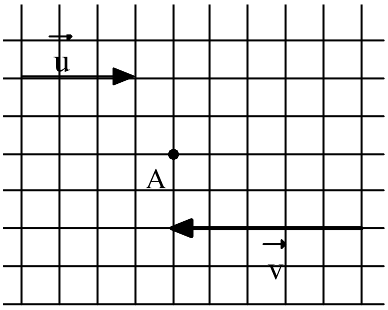
2°) Application. *Exercice n°5 : d*ans chacun des cas suivants, construire en rouge le représentant $\overrightarrow{AC}$ de $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

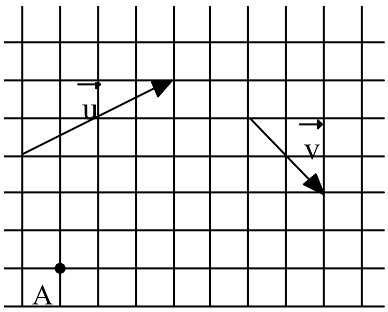


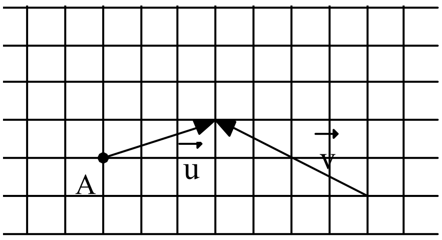












Pour s'entraîner : exercices n°2 et 7 page 146.

3°) Relation de Chasles : $\boxed{\text{A et C étant donnés, pour tout point B : } \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}}$

Pour s'entraîner : exercices n°16 page 148.

4°) Soustraction de deux vecteurs : La différence $\vec{u}-\vec{v}$ des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est définie par : $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+\left(-\vec{v}\right)$.

Exemple : Calcul de $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\left(-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$.

Pour s'entraîner : exercices n°3 et 6 page 147.

5°) Savoir simplifier des expressions vectorielles :

Exercice n°6 : Ecrire le plus simplement possible

$\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ $\quad$ $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}$ $\quad$ $\vec{w}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC}$ $\quad$ $\vec{x}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

$\vec{y}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}$ $\quad$ $\vec{z}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$ $\quad$ $\vec{u}'=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}$ $\quad$ $\vec{v}'=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{AB}$

Pour s'entraîner : exercices n°8 et 9 page 147 et 14 page 147.

6°) Savoir utiliser la relation de Chasles pour démontrer une égalité vectorielle : exercice n° 19 page 148

IV) Multiplication d'un vecteur par un réel

1°) Valeur absolue :

a) Définition :

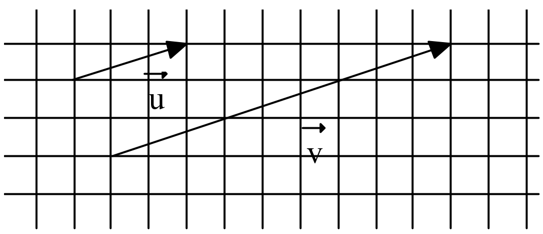
On appelle valeur absolue d'un réel a le nombre noté $|a|$ qui est égal au nombre a si a est positif et au nombre –a si a est négatif.

b) Exercice n°7 : déterminer $|k|$ pour k = -2 puis pour k = 3.

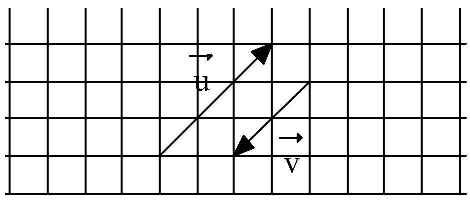
2°) Multiplication d'un vecteur par un réel.

a) Activité d'approche : voir TD n°….

b) *Exercice n°8* : dans chacun des cas suivants $\vec{v}=k\vec{u}$, déterminer k



$\vec{v}=$......$\vec{u}$ $\quad$ k = …….. ; k…..0

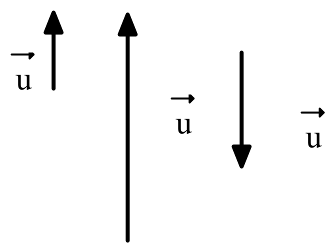


$\vec{v}=$......$\vec{u}$ $\quad$ k = ……. ; k ….. 0

c) Définition :

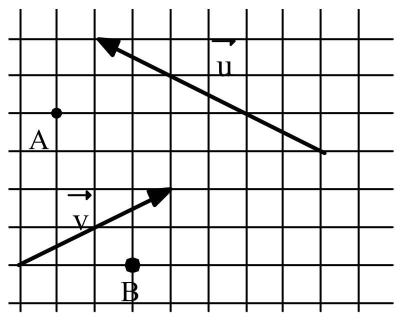
Si $\vec{u}$ est un vecteur non nul et k est un réel non nul.
Le produit de $\vec{u}$ par le réel k est le vecteur noté $k\vec{u}$:
- de même direction que $\vec{u}$
- de même sens que $\vec{u}$, si k > 0 et de sens contraire, si k < 0 ;
- de longueur égale à $|k|$ fois la longueur de $\vec{u}$.

Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou k = 0, on convient que : $k\vec{0}=\vec{0}$ et $0\vec{u}=\vec{0}$

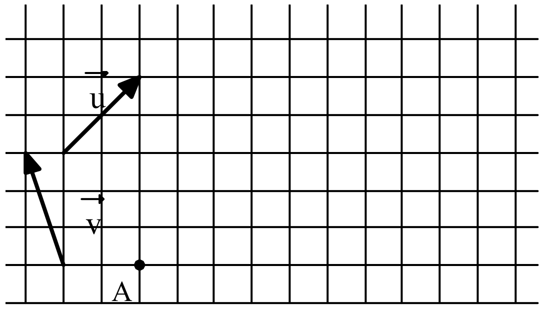


d) Application : placer un point défini par une égalité vectorielle (Méthode D page 137).

Exercice n°9 :
On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et les points A et B donnés sur le quadrillage ci-contre.
Construire le point M tel que $\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{3}\vec{u}$ et le point N tel que $\overrightarrow{BN}=\frac{3}{2}\vec{v}$



Exercice n°10 : Sur la figure ci-contre placer le point M tel que $\overrightarrow{AM}=3\vec{u}-2\vec{v}$



Exercice n°11 : [AB] est un segment de longueur 3 cm.

a) Placer le point M tel que $\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

b) Placer le point N tel que $\overrightarrow{AN}=4\overrightarrow{BN}$

Pour s'entraîner : exercices n°23 et 25 page 149. 40 page 151.

3°) a) Propriétés admises :

> Soit k et k' deux réels et soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs :
> $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$
> $(k+k')\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{u}$
> $k(k'\vec{u})=(kk')\vec{u}$

le calcul vectoriel utilise naturellement des propriétés de développement et de factorisation.

b) Application : savoir calculer avec des vecteurs (voir méthode F page 137)

Exercice n° 12 :

- Simplifier $2(\vec{u}+\vec{v})$ $\quad 7\vec{u}-3\vec{u}=$ $\quad 5(-3\vec{u})=$

  $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AB}=$ $\quad 3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}=$

- Exprimer simplement le vecteur $\vec{w}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sachant que : $\vec{w}=2(3\vec{u}-2\vec{v})+\frac{1}{2}(-5\vec{u}+\vec{v})$

Pour s'entraîner : exercice n°27 page 149

4°) Exprimer deux vecteurs en fonction de deux autres

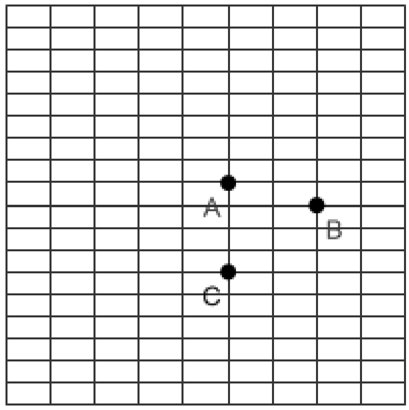
Exercice n°13 : Soit ABC un triangle.

a) Placer le point E tel que $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{CA}$

b) Placer le point F tel que $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{EC}$

c) Placer le point G tel que $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

d) Exprimer, en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AG}$.



Pour s'entraîner : exercice n°28 page 149

5°) Vecteurs colinéaires :

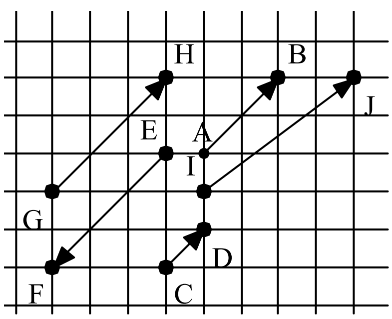
a) Définition :

> Tout vecteur est colinéaire au vecteur nul
> Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul
> $\vec{v}$ est **colinéaire à** $\vec{u}$ $\Leftrightarrow$ il existe un réel k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$ (k est le coefficient de colinéarité).

Exercice n°14 : A l'aide du quadrillage de la figure suivante déterminer le réel k, s'il existe, pour chacun des cas suivants :

$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ $\quad \overrightarrow{EF}=k\overrightarrow{CD}$ $\quad \overrightarrow{EF}=k\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{GH}=k\overrightarrow{EF}$ $\quad \overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$ $\quad \overrightarrow{IJ}=k\overrightarrow{CD}$



Citer deux vecteurs qui sont colinéaires puis deux vecteurs qui ne le sont pas.

b) Propriété :

Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si ils ont la même direction.

6°) Montrer que deux vecteurs sont colinéaires :

Exercice n°15 : Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants sont colinéaires :

a) $5\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$ b) $-4\vec{u}+\frac{1}{3}\vec{v}=\vec{0}$ c) $-4\vec{u}=5\vec{v}$

Exercice n°16 : Dans chacun des cas suivants, démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

b) $\vec{u}=-\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AC}$ et $\vec{v}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$

Pour s'entraîner : exercices n°35 à 38 page 150.

V) Applications de la colinéarité

1°) Parallélisme de deux droites :

Propriété :

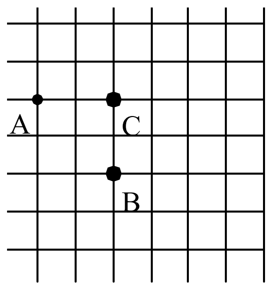
Soit A, B, C et D quatre points tels que A $\neq$ B et C $\neq$ D : Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exercice n°17 :

Soit ABC un triangle. Soit le point D tel que : $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(5\overrightarrow{AC}+3\overrightarrow{CB}\right)$

a) Placer le point D sur la figure
b) Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

(indication : on cherchera à exprimer $\overrightarrow{CD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$)



Pour s'entraîner : exercices n°44 et 48 page 151
(indication pour le 48 : on cherchera à exprimer $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$)

2°) Alignement de points

Propriété :

Soit A, B et E trois points distincts. A, B et E sont alignés : Si et seulement si les droites (AB) et (AE) sont parallèles Ou encore Si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.

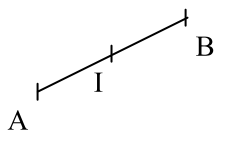
Exercice n°18 : Soit A, B et C trois points du plan tels que : $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{CB}\right)$.

Démontrer que les points A, B et C sont alignés.

Pour s'entraîner : exercices n°49 page 151(rappel :utilisation du compas pour la figure).
exercices n°89 page 157 : remplacer le 2°) par exprimer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et exprimer $\overrightarrow{AF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

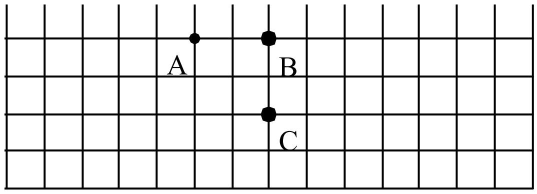
3°) Caractérisation du milieu d'un segment

Le milieu I du segment [AB] est caractérisé par l'une des propriété suivantes : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ ou encore $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ou encore $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}$ Pour tout point M du plan $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$



CHAPITRE …. : LES VECTEURS DU PLAN

Exercice n°19 : Soit ABC un triangle.
Soit D le point tel que $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et E le point tel que $\overrightarrow{CE}=3\overrightarrow{BA}$
Montrer que C est le milieu du segment [DE].



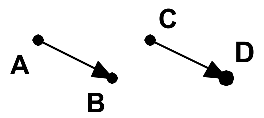
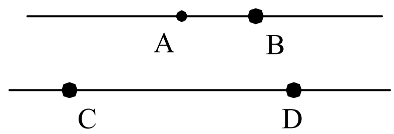
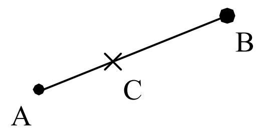
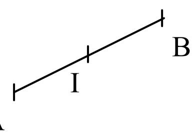
Pour s'entraîner : exercice n°33 a) et d) et n°34 a) b) e) page 150
exercices n°45, 46,43 et 50 page 151
Indications pour le 45 : Exprimer $\overrightarrow{DC}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$

Indications pour le 46 : Exprimer $\overrightarrow{BF}$ *et* $\overrightarrow{QB}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AB}$*.*

Indications pour le 43 :
a) Exprimer $\overrightarrow{BF}$ *en fonction de* $\overrightarrow{BC}$*, exprimer* $\overrightarrow{EB}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$*, en déduire* $\overrightarrow{EF}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$
b) Exprimer $\overrightarrow{AK}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AC}$ *en déduire* $\overrightarrow{EK}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *)*
c) Conclure.

Indications pour le 50 :
exprimer le vecteur $\overrightarrow{CI}$ *en fonction de* $\overrightarrow{CE}$*,*
utiliser la figure pour exprimer le vecteur $\overrightarrow{AE}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$*,* $\overrightarrow{BF}$ *en fonction de* $\overrightarrow{BC}$*,*

4°) **Tableau récapitulatif**

Relations vectorielles	Propriétés géométriques	Figures
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$	ABDC est un parallélogramme	
$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$	Les droites (AB) et (CD) sont parallèles	
$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$	Les points A, B et C sont alignés	
$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$ (ou $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{0}$) $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ Pour tout point M du plan : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$	I est le milieu de [AB]	

Pour s'entraîner : exercices n°40,41 page 151

5°) Savoir traduire une situation géométrique a l'aide de vecteurs colinéaires et inversement :
exercices n°33 et n°34 page 150