1 PMSM Correction de l'évaluation n° 9 : Equations cos x = a et sin x = a 20/04/07 (durée 1h15)

Exercice n°1 : (0,75 points)

$\theta = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ou $\frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$,

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

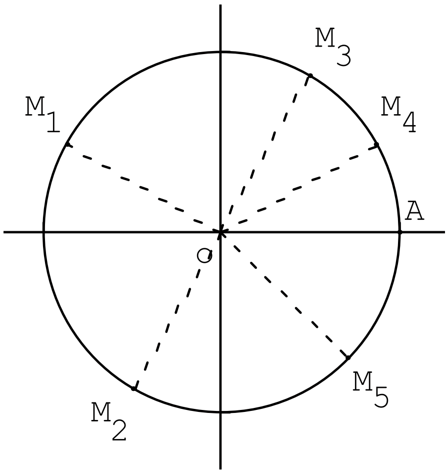
Exercice n°2 : (0,75 points). $\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Exercice n°3 (0,5 points) : Lorsque $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

Le signe de cos x est positif et le signe de sinx est négatif

Exercice n°4 (4 points) :

x	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{10\pi}{3}$	$-\frac{17\pi}{3}$	$\frac{85\pi}{6}$	$-\frac{41\pi}{4}$
cos x	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
sin x	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
Point image sur le cercle ci contre M_i	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5



$$\frac{10\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = 4\pi - \frac{2\pi}{3} = 2\times 2\pi - \frac{2\pi}{3}$$

$$-\frac{17\pi}{3} = -\frac{18\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = -6\pi + \frac{\pi}{3} = -3\times 2\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{85\pi}{6} = \frac{84\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 14\pi + \frac{\pi}{6} = 6\times 2\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$-\frac{41\pi}{4} = -\frac{40\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -10\pi - \frac{\pi}{4} = -5\times 2\pi - \frac{\pi}{4}$$

Exercice n°5 (2,5 points) :

$\sin(7\pi + x) = \sin(6\pi + \pi + x)$

la fonctions sinus est périodique de période 2π

donc $\sin(7\pi + x) = \sin(\pi + x)$,

On sait que pour tout réel x, $\sin(\pi + x) = -\sin x$.

Conclusion : $\boxed{\sin(7\pi + x) = -\sin x}$

$$\cos\left(\frac{15\pi}{2} + x\right) = \cos\left(8\pi - \frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin x$$

la fonctions cosinus est périodique de période 2π

donc $\cos\left(\frac{15\pi}{2} + x\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin x$

On sait que pour tout réel x, $\cos\left(-\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin x$

Conclusion : $\boxed{\cos\left(\frac{15\pi}{2} + x\right) = \sin x}$

Exercice n°6 (7 points) :

Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$

1°)(**1,5 pts**) $P(1) = 2 + 3 - 3 - 2 = 0$.

Donc P(x) est factorisable par x-1 et $P(x) = (x-1)(2x^2 + bx + 2)$ où b est un réel à déterminer.

On développe pour trouver b :

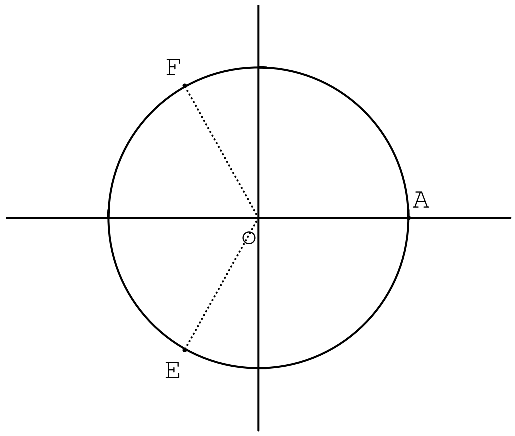
$(x-1)(2x^2 + bx + 2) = 2x^3 + bx^2 + 2x - 2x^2 - bx - 2 = 2x^3 + (b-2)x^2 + (2-b)x - 2$

Par identification des polynômes on obtient :
$b - 2 = 3$ et $2 - b = -3$, d'où $b = 5$.
Finalement **$P(x) = (x-1)\,(2x^2 + 5x + 2)$**

2°)(**1,5 pts**) $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1) = 0 \text{ ou } 2x^2 + 5x + 2 = 0$
Soit Δ le discriminant de $2x^2 + 5x + 2$: $\Delta = 25 - 16 = 9$
$2x^2 + 5x + 2$ a deux racines : $x' = \frac{-5-3}{4} = \frac{-8}{4} = -2$ ou $x'' = \frac{-5+3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

Conclusion : $\boxed{P(x) = 0 \text{ a trois solutions } 1, -2, \frac{-1}{2}}$

3°) (**4 pts**)
$2\cos^3 x + 3\cos^2 x - 3\cos x = 2 \Leftrightarrow 2\cos^3 x + 3\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$
On pose $X = \cos x$
On obtient $2X^3 + 3X^2 - 3X - 2 = 0$
On retrouve l'équation du 2°) donc $X = 1$ ou $X = -2$ ou $X = -0{,}5$.
On en déduit que $\cos x = 1$ ou $\cos x = -2$ ou $\cos x = \frac{-1}{2}$
$\cos x = 1$ a pour solution tout nombre de la forme $0 + 2k\pi$ où k est un entier relatif.
$\cos x = -2$ n'a pas de solution car un cosinus est toujours compris entre –1 et 1.



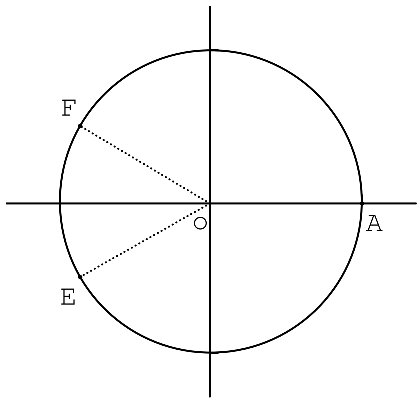
$\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ avec $k \in 9$.

Finalement $\boxed{S = \left\{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, 2k\pi, k \in Z\right\}}$

Les solutions sont représentés par les points A, E et F sur le cercle ci-contre

Exercice n°7 : **(4,5 points) :**
1°)

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$. Avec $k \in 9$



Remarque : $-\frac{5\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} - 2\pi$.

2°) $\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

On sait que $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc

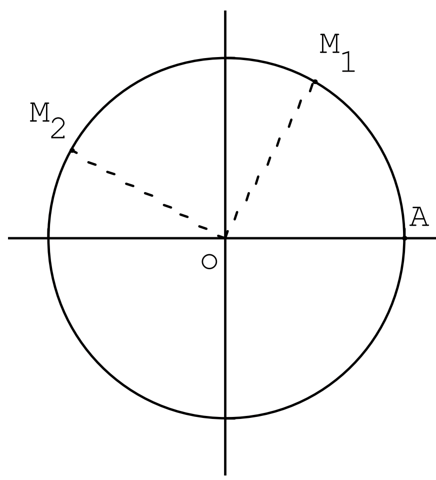
$$\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left\{ x - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou } x - \frac{\pi}{12} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{avec } k \in 9 \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou } x = \frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{avec } k \in 9 \right.$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{10\pi}{12} + 2k\pi \text{ avec } k \in 9$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ avec } k \in 9$$



Les solutions sont représentées sur le cercle ci-contre par les points M_1 et M_2