Exercice n°1 (1,5 points) : $h(-1) = 7(-1)^3 - 4(-1)^2 - 17(-1) - 6 = -7 - 4 + 17 - 6 = 0$.
Le polynôme h(x) est factorisable par x+1 car h(-1) = 0.
$h(1) = 7(1)^3 - 4(1)^2 - 17(1) - 6 = 7 - 4 - 17 - 6 = -20$.
Le polynôme h(x) n'est pas factorisable par x-1 car h(1) = - 20 et –20 est différent de 0.

Exercice n°2 (3,5 points) : $h(x) = -6x^3 + 19x^2 - 19x + 6$
1) $h(1) = -6(1)^3 + 19(1)^2 - 19(1) + 6 = -6 + 19 - 19 + 6 = 0$
2) Théorème : **si un polynôme s'annule pour x = a, alors on peut mettre x – a en facteur dans ce polynôme : il existe un polynôme Q(x) tel que P(x) = (x – a) Q(x).**

h(1) = 0 donc h(x) est factorisable par x-1 et h(x) = (x-1)Q(x) où Q(x) est un polynôme à déterminer.
h est de degré 3 donc Q(x) est un polynôme de degré 2 c'est à dire $Q(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois réels à déterminer.
Donc $h(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.

Théorème d'identification :
Deux polynômes sont égaux si et seulement si les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux

D'après le théorème d'identification a=- 6 et c = -6 d'où $h(x) = (x - 1)(-6x^2 + bx - 6)$ où b est un réel à déterminer.
Je développe et j'ordonne : $h(x) = -6x^3 + bx^2 - 6x + 6x^2 - bx + 6 = -6x^3 + (b + 6)x^2 + (-6 - b)x + 6$
Donc toujours d'après le théorème d'identification : b + 6 = 19 et –6- b = -19 donc b =13. Conclusion : $\boxed{h(x) = (x - 1)(-6x^2 + 13x - 6)}$.

Exercice n°3 (3 points) : $i(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$
1) $i(-1) = 3(-1)^3 - 4(-1)^2 - 5(-1) + 2 = -3 - 4 + 5 + 2 = 0$ et $i(2) = 3(2)^3 - 4(2)^2 - 5(2) + 2 = 3(8) - 16 - 10 + 2 = 24 - 16 - 10 + 2 = 26 - 26 = 0$.

Donc i(x) est factorisable par x + 1 et x - 2. Conclusion : i(x) = (x + 1) (x- 2) (3x -1). 2) $\boxed{i(x) = 0 \text{ a trois solutions } -1, 2, \text{ et } \frac{1}{3}}$.

Exercice n°4 (2 points) : $P(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$
1°) La représentation graphique de P coupe l'axe des abscisses en trois points dont deux d'abscisses -1 et 2.
Conclusion : $\boxed{-1 \text{ et } 2 \text{ sont deux racines de } P}$.
2°) On remarque de P = i (voir exercice n°3) donc le calcul a déjà été fait. On a bien P(-1) = 0 et P(2)=0

3°) De même d'après l'exercice n°3 : P(x) = (x + 1) (x- 2) (3x -1). Conclusion : $\boxed{\text{la troisième racine de P est } \frac{1}{3}}$.

Exercice n°5 (3 points) :
$f(x) = 4x^2 + 3x - 1$
a) $\boxed{f(-1) = 0 \text{ donc f est factorisable par } x+1 \text{ et } f(x) = (x + 1)(4x - 1)}$
b) f(x) = 0 si et seulement si (x + 1)(4x - 1) = 0
f(x) = 0 si et seulement si (x + 1)= 0 ou (4x - 1) = 0

f(x) = 0 si et seulement si x = -1 ou $x = \frac{1}{4}$.

Conclusion : $\boxed{f(x) = 0 \text{ a deux solutions } -1 \text{ et } \frac{1}{4}}$

c) f(x) = -1 si et seulement si $4x^2 + 3x - 1 = -1$
f(x) = -1 si et seulement si $4x^2 + 3x = 0$
f(x) = -1 si et seulement si $x(4x + 3) = 0$

f(x) = -1 si et seulement si x = 0 ou $x = -\frac{3}{4}$.

Conclusion : $\boxed{f(x) = -1 \text{ a deux solutions } 0 \text{ et } \frac{-3}{4}}$

Exercice n°6 (3,5 points) : $\dfrac{-2x^2 + 3x + 3}{2x + 1} = ax + b + \dfrac{c}{2x + 1}$

Or $ax + b + \dfrac{c}{2x+1} = \dfrac{(ax + b)(2x + 1)}{2x + 1} + \dfrac{c}{2x + 1} = \dfrac{2ax^2 + ax + 2bx + b + c}{2x + 1} = \dfrac{2ax^2 + (a + 2b)x + b + c}{2x + 1}$

Donc $-2x^2 + 3x + 3 = 2ax^2 + (a + 2b)x + b + c$ pour tout réel x.

D'après le théorème d'identification : $\begin{cases} 2a = -2 \\ a + 2b = 3 \\ b + c = 3 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = -1 \\ -1 + 2b = 3 \\ b + c = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} a = -1 \\ 2b = 4 \\ b + c = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$

Conclusion : $\boxed{a = -1, b = 2 \text{ et } c = 1 \text{ et } \dfrac{-2x^2 + 3x + 3}{2x + 1} = -x + 2 + \dfrac{1}{2x + 1}}$

Exercice n°7 (3,5 points) : $f(x) = 2x^3 - x^2 + 5x + a$.
f est factorisable par x +2 si et seulement si f(-2) = 0. Or $f(-2) = 2(-2)^3 - (-2)^2 + 5x(-2) + a = -16 - 4 - 10 + a = -30 + a$.
Donc f est factorisable par x +2 si et seulement si –30 + a = 0
Conclusion : $\boxed{\text{f est factorisable par } x + 2 \text{ si et seulement si } a = 30}$.

On a alors $f(x) = (x + 2)(2x^2 + bx + 15)$ où b est à trouver
Je développe et j'ordonne : $f(x) = 2x^3 + bx^2 + 15x + 4x^2 + 2bx + 30 = 2x^3 + (b + 4)x^2 + (15 + 2b)x + 30$
Donc toujours d'après le théorème d'identification : b + 4 = -1 et 15+2b = 5 donc b =-5. Conclusion : $\boxed{f(x) = (x - 1)(2x^2 - 5x + 15)}$