

CHAPITRE N°.....TRIGONOMETRIE ET FONCTIONS CIRCULAIRES

I) Le radian

1°) Mesure en radian :

L'angle **plat** mesure π radians (notation : rad)

La mesure d'un angle en radian est **proportionnelle** à sa mesure en degré

2°) Angles particuliers :

Se familiariser avec les mesures en radians des angles remarquables est indispensable :

angle	plat	plein	droit			
mesure en degrés	180	360	90	60	45	30
mesure en radians	π	2π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

3°) Conversion : **Exercice n°1** : convertir en radian 33° , convertir en degré $\frac{5\pi}{6}$ rad

II) Mesures d'arcs orientés du cercle trigonométrique

1°) Cercle trigonométrique :

On appelle cercle trigonométrique tout cercle de rayon 1, orienté dans le sens direct (c'est à dire dans le sens inverse des aiguilles d'une montre)

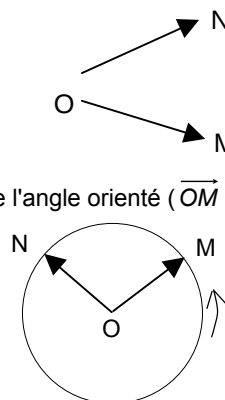
2°) Mesure d'un angle orienté :

a) Exemple :

b) Tout couple ordonné de vecteurs unitaires $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ détermine un **angle orienté**.

c) Définition

Soit M et N deux points d'un cercle trigonométrique de centre O. Une mesure en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ est une mesure du parcours d'un mobile qui va du point M au point N sur ce cercle ; elle est comptée positivement lorsqu'il tourne dans le sens direct ; comptée négativement lorsqu'il tourne dans le sens indirect ;



d) Théorème :

Si x est une mesure en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ alors l'ensemble des mesures de cet angle est :

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

e) Savoir déterminer une mesure des angles orientés particuliers :

Exercice n°2 : voir TD n°

f) Savoir placer des points sur le cercle trigonométrique

Exercice n°3 : Placer les images des nombres suivants sur le cercle trigonométrique : $\frac{25\pi}{3}$ rad, $\frac{298\pi}{5}$ rad, $\frac{29\pi}{6}$ rad

3°) Mesure principale :

a) La mesure principale α de l'angle orienté $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ est égale à la mesure de l'arc permettant d'aller du point M au point N, par le "plus court chemin" sur le cercle.

Si le chemin est décrit dans le sens direct, α est positif. Si le chemin est décrit dans le sens indirect, α est négatif. Lorsque N et M sont diamétralement opposés, par convention, la mesure principale est π .

Définition : on appelle **mesure principale d'un angle**, celle qui appartient à l'intervalle $]-\pi ; \pi]$

b) Savoir déterminer la mesure principale d'un angle orienté

Exercice n°4 : donner la détermination principale des mesures suivantes : $\frac{11\pi}{3}$, $\frac{19\pi}{4}$, $-\frac{31\pi}{6}$, $-\frac{22\pi}{3}$

Exercice n°5 : Soit $E = \left\{ -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ un ensemble de nombres

a) Placer les images de ces nombres sur le cercle trigonométrique

b) Donner les nombres de cet ensemble appartenant à

$]-\pi, \pi]$ puis à $[0, 2\pi[$ puis à $[-2\pi, 0[$

CHAPITRE N°.....TRIGONOMETRIE ET FONCTIONS CIRCULAIRES

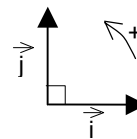
III) Cosinus et sinus d'un nombre

1°) Repères direct et indirect : soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal du plan.

Si la mesure principale de l'angle $(\vec{i}, \vec{j})$ est $\frac{\pi}{2}$, alors le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormal direct.

Si la mesure principale de l'angle $(\vec{i}, \vec{j})$ est $-\frac{\pi}{2}$, alors le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormal indirect.

Lorsque aucune indication n'est donnée, on considérera que le repère est direct.



2°) Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{OA}, \vec{OB})$. Soit un cercle trigonométrique de centre O.

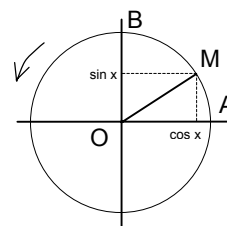
A tout nombre réel x , on peut associer un point M du cercle trigonométrique tel que x est une mesure de l'angle $(\vec{OA}, \vec{OM})$.

Définition :

Soit un nombre réel x et M le point du cercle trigonométrique tel que : $(\vec{OA}, \vec{OM}) = x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

L'abscisse du point M s'appelle le cosinus du nombre réel x et se note $\cos x$.

L'ordonnée du point M s'appelle le sinus du nombre réel x et se note $\sin x$.



3°) Propriétés :

a) **Quel que soit le nombre réel x : $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$**

b) Périodicité : **Pour tout réel x et pour tout entier relatif k : $\cos(x + k2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + k2\pi) = \sin x$.**

Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π .

Exercice n°6 : a) montrer que, pour tout réel x appartenant à $]0, \pi[$: $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

b) Simplifier, pour x réel, l'expression : $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$

4°) Valeurs remarquables :

x en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	
x en degré	0	30	45	60	90	180	270
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
tan x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	N'existe pas	0	N'existe pas

Exercice n°7 : En utilisant le cercle trigonométrique, donner les valeurs exactes des cosinus et sinus des angles en radians suivants :

x	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{17\pi}{6}$	$-\frac{30\pi}{6}$
cos x								
sin x								
Point image sur le cercle M _i								

Exercice n°8 : déterminer les valeurs numériques exactes de : a) $\sin(\frac{27\pi}{2})$ b) $\cos(-\frac{35\pi}{2})$ c) $\sin(\frac{49\pi}{2})$ d) $\sin(-\frac{85\pi}{2})$

Exercice n°9 : a) Placer sur le cercle trigonométrique les images des réels $\frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$

b) Donner des valeurs exactes (et en utilisant le 1°)) le cosinus et le sinus de $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$

CHAPITRE N°.....TRIGONOMETRIE ET FONCTIONS CIRCULAIRES

c) en déduire la valeur exacte de $\cos \frac{40\pi}{3}$, $\sin \frac{19\pi}{3}$, $\cos(-\frac{23\pi}{3})$, $\sin(-\frac{46\pi}{3})$

5°) Angles associés :

$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$
$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$

Exercice n°10 : simplifier les expressions suivantes :

a) $\cos(25\pi - x)$ b) $\sin(-11\pi + x)$ c) $\sin(128\pi - x)$ d) $\cos(45\pi + x)$ e) $(1 + \sin(x))(1 + \sin(-x))$

6°) Angles complémentaires :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

Exercice n°11 : simplifier les expressions suivantes : a) $\cos\left(\frac{19\pi}{2} + x\right)$ b) $\sin\left(x - \frac{55\pi}{2}\right)$ c) $\cos\left(-\frac{43\pi}{2} - x\right)$ d) $\sin\left(\frac{37\pi}{2} - x\right)$

IV) Equation trigonométrique : $\cos x = a$

1°) Exemples : **Exercice n°12 :**

- a) Résoudre l'équation $\cos x = 1,5$
- b) Résoudre l'équation $\cos x = 0,5$

2°) Cas général :

Soit l'équation $\cos x = a$.
 Si $a \notin [-1, 1]$ l'équation $\cos x = a$ n'a pas de solution
 Si $a \in [-1, 1]$, on cherche une solution α et l'équation à résoudre devient $\cos x = \cos \alpha$.
 Les solutions sont les nombres de la forme : $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = -\alpha + 2k\pi$, où k est un nombre entier relatif quelconque.

La solution α se détermine :

Soit à l'aide du tableau des valeurs remarquables
 Soit à l'aide d'une calculatrice (touches inv cos)

3°) Cas particuliers :

- a) $\cos x = 1$
- b) $\cos x = -1$

4°) application :

Exercice n°13 : Résoudre dans 3 les équations a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ c) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\cos x = -0,2$

Exercice n°14 : Résoudre dans 3 l'équation : $2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$

Exercice n°15 : On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$.

- a) Calculer $P(3)$. En déduire une factorisation de $P(x)$.
- b) Résoudre dans 3 l'équation $P(x) = 0$.
- c) Résoudre dans 3 l'équation : $2\cos^3 x - 5\cos^2 x - 4\cos x + 3 = 0$.

V) Equation trigonométrique : $\sin x = a$

1°) Exemples :

Exercice n°16 :

- a) Résoudre l'équation $\sin x = 1,3$
- b) Résoudre l'équation $\sin x = 0,5$

2°) Cas général

Soit l'équation $\sin x = a$.
 Si $a \notin [-1, 1]$ l'équation $\sin x = a$ n'a pas de solution
 Si $a \in [-1, 1]$, on cherche une solution α et l'équation à résoudre devient $\sin x = \sin \alpha$.
 Les solutions sont les nombres de la forme : $x = \alpha + 2k\pi$ ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$, où k est un nombre entier relatif quelconque

3°) Cas particuliers :

- a) $\sin x = 1$
- b) $\sin x = -1$

4°) Application : **Exercice n°17 :** Résoudre dans 3 les équations : a) $\sin x = -0,5$ b) $\sin x = 0,3$ c) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$