TD n°4 : GENERALITES SUR LES FONCTIONS

I) Rappels

1°) Savoir calculer une image à partir d'une expression algébrique et savoir établir un tableau de valeurs :

Exercice n°1 : Soit la fonction f définie sur [0 ; 5] par : $f(x) = \frac{3x^2}{x+1}$.

a) Sans calculatrice : Calculer « à la main » les images par la fonction f de 1, $\sqrt{2}$, $\frac{2}{3}$.

b) Avec calculatrice : Compléter le tableau de valeurs suivant (si nécessaire voir méthodes ci dessous) .

Valeurs de x	0	1	2	3	4	5
Valeurs de f(x)						

• Méthode pour entrer l'expression de la fonction :

Texas : touche $\boxed{\text{Y=}}$ et sur la ligne $\boxed{\text{Y1}}$ taper l'expression de la fonction en utilisant la touche $\boxed{\text{X, T, }\theta}$ chaque fois qu'apparaît la variable x
Casio : ouvrir le menu GRAPH et sur la ligne $\boxed{\text{Y1}}$ taper l'expression de la fonction en utilisant la touche $\boxed{\text{X, T, }\theta}$ chaque fois qu'apparaît la variable x

• Méthode pour dresser le tableau de valeurs de la fonction sur l'intervalle [0, 5] avec un pas égal à 1 :

Texas : ouvrir le menu $\boxed{\text{Table Setup}}$ à l'aide de la touche seconde $\boxed{\text{Tblset}}$. Choisir la première valeur de la table (TblStart ou TBLMin) et le pas de la table $\boxed{\Delta\text{Tbl}}$. Sélectionner ensuite Auto pour Indpnt et Auto pour Depend. On obtient la table avec la touche seconde $\boxed{\text{TABLE}}$

Casio : ouvrir le menu Table en sélectionnant l'icône $\boxed{\text{TABLE}}$, suivi de $\boxed{\text{EXE}}$. Touche $\boxed{\text{QUIT}}$ si nécessaire.
On accède au menu $\boxed{\text{RANG}}$ à l'aide de la touche F3 ou F5. Dans le menu $\boxed{\text{Table Range}}$, on choisit la première valeur de la table (Strt) , la dernière valeur (End) et le pas de la table $\boxed{\text{ptch}}$. On tape Exe entre chaque valeur, puis EXIT ou QUIT pour revenir à l'écran précédent. On obtient la table en choisissant le menu TABL(touche F6 ou F4).

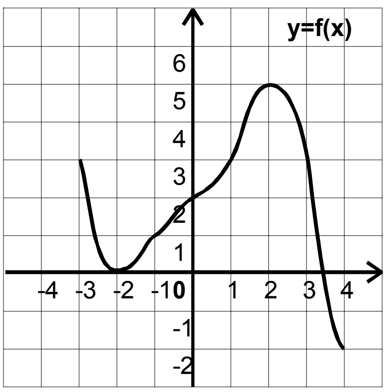
2°) Savoir déterminer des valeurs interdites :

Exercice °2 : au réel x on associe, si possible, le réel $\frac{\sqrt{x}}{x-1}$.
Parmi les valeurs de x suivantes, reconnaître celles qui ont une image (que l'on calculera « à la main ») et celles qui n'en ont pas, appelées valeurs interdites :
a) -2, b) 4, c) 1, d) 0.

Contrôler les résultats obtenus avec la calculatrice : entrer $\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ en Y1 et vérifier que le tableau de valeur indique ERROR pour les valeurs interdites.

3°**) Savoir déterminer des images par lecture graphique**

Exercice n°3 : La courbe ci-contre représente une fonction f définie sur l'intervalle [-3 ; 4]



Déterminer par lecture graphique les images de -3 ; 0 et 2 par f.

4°) Savoir utiliser une calculatrice pour obtenir une courbe :

Exercice n°4 : On considère la fonction f définie sur [-3 , 3] par $f(x) = \frac{-2x}{x^2+1}$

a) Sans utiliser la calculatrice, calculer f(x) pour les valeurs de x suivantes : 0 ; 1 ; -2 et 3.

b) En déduire si les points suivants sont situés sur la représentation graphique de f : O (0 ; 0) ; A (1 ; $-\frac{1}{6}$) ; B (-2 ; $\frac{-6}{5}$) ; C (3 ; -0,6).

c) En utilisant la calculatrice, dresser le tableau de valeurs de la fonction sur l'intervalle [-3 , 3] avec un pas égal à 1 (pour la marche à suivre : voir exercice 1)

d) Choisir une fenêtre d'affichage :

Texas : appuyer sur la touche Window et taper les valeurs minimales et maximales de x et y en se déplaçant avec les flêches verticales du curseur (ici Xmin : -3 ; Xmax : 3 ; scale : 1 ; Ymin : -2 ; Ymax : 2 ; scale 1).
Casio : appuyer sur la touche shift puis F3. dans le menu V-Window et taper les valeurs minimales et maximales de x et y en se déplaçant avec les flêches verticales du curseur (ici Xmin : -3 ; Xmax : 3 ; scale : 1 ; Ymin : -2 ; Ymax : 2 ; scale 1).

e) Visualiser sur la calculatrice la courbe C représentative de la fonction f :

Texas : appuyer sur la touche GRAPH
Casio : dans le menu GRAPH appuyer sur la touche correspondant à DRAW

f) Placer dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (prendre 2 cm comme unité sur l'axe des abscisses et 4 cm comme unité sur l'axe des ordonnées) , les 7 points correspondant au tableau de valeurs plus les 2 points d'abscisses -0,5 et 0,5.
Tracer la courbe représentative de f . Que pouvez vous dire de la représentation graphique ?

g) Résoudre par le calcul f(x) = 1. Obtient-on le même résultat par lecture graphique ?

II) Sens de variation d'une fonction :

1°) Définitions :
a) <u>Fonction croissante :</u>

Une fonction f est strictement croissante sur un intervalle I lorsque :
quels que soient les réels x_1 et x_2 de I, si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$. On dit que f conserve l'ordre

<u>b) Fonction décroissante :</u>

Une fonction f est strictement décroissante sur un intervalle I lorsque :
quels que soient les réels x_1 et x_2 de I, si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$. On dit que f inverse l'ordre.

f est une fonction monotone sur un intervalle I si f est soit croissante soit décroissante sur I

<u>c) Extremum d'une fonction</u>.

f admet un maximum sur un intervalle I en x_0 ($x_0 \in$ I) si et seulement si pour tout réel x de I, on a : $f(x) \leq f(x_0)$.
f admet un minimum sur un intervalle I en x_0 ($x_0 \in$ I) si et seulement si pour tout réel x de I, on a : $f(x) \geq f(x_0)$.

2°) Justifier l'existence d'un extremum

Exercice n°5 : Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = 4x^2 - 4x + 5$.
a) A l'aide de la calculatrice, déterminer le minimum de f :

• Obtenir la fenêtre standard :

Texas : menu ZOOM puis ZSTANDARD et ENTER.
Casio : menu V-WINDOW puis sélectionner la fenêtre standard en tapant sur STD ou INIT Puis EXIT pour revenir au menu précédent (graph func) et DRAW

• Utiliser les fonctions TRACE et ZOOM des calculatrices pour la recherche d'un extremum :

Texas : la courbe étant affichée à l'écran, sélectionner la fonction TRACE. Une croix apparaît sur la courbe et les coordonnées du point de la courbe correspondant à cette croix s'affichent en bas de l'écran. Déplacer la croix à l'aide des touches horizontales du curseur.
Appuyer sur la touche ZOOM. Choisir le menu Zbox suivi de ENTER : il va permettre de délimiter un rectangle qui correspond à la partie de la courbe à agrandir.
Placer la croix clignotante avec le curseur à un coin du rectangle désiré, taper ENTER, puis aller au coin opposé du rectangle avec les touches du cursreur. On termine par ENTER. Puis utiliser la fonction TRACE

Casio : **l**a courbe étant affichée à l'écran, sélectionner la fonction TRACE avec la touche shift suivie de F1. Une croix apparaît sur la courbe et les coordonnées du point de la courbe correspondant à cette croix s'affichent en bas de l'écran. Déplacer la croix à l'aide des touches horizontales du curseur
La courbe étant affichée à l'écran, activer le menu ZOOM (touche F2).
Choisir le menu BOX (touche F1), ce qui va permettre de délimiter un rectangle qui correspond à la partie de la courbe à agrandir.
Placer la croix avec le curseur à un coin du rectangle désiré, taper EXE, puis aller au coin opposé du rectangle avec les touches du curseur. On termine par EXE. Puis utiliser la fonction TRACE

b) Démontrer par le calcul que 4 est le minimum de f sur ℝ. Pour quelle valeur de x est-il atteint ?

TD n°4 : GENERALITES SUR LES FONCTIONS

3°) Savoir déterminer les variations d'une fonction d'après sa représentation graphique

Exercice n°6 : Reprendre la fonction étudiée dans l'exercice n°3 (ou encore exercice n°9 ci dessous)
Indiquer par lecture graphique le sens de variation de f sur cet intervalle et dresser son tableau de variation.
Déterminer par lecture graphique le minimum et le maximum de f sur l'intervalle [-3 ; 4] et préciser en quelles valeurs ils sont atteints.

Exercice n°7: On considère la fonction f définie sur [-10 ; -3 [$\cup$] –3 , 5] par $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$.

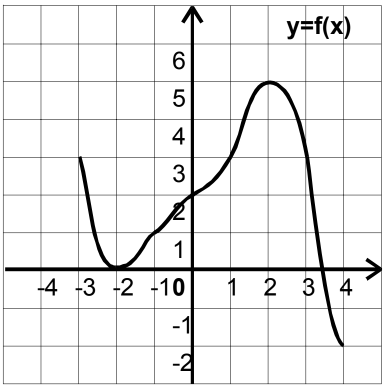
Afficher sur l'écran de la calculatrice la courbe représentant f. Utiliser le fenêtre : x $\in$ [-10 ; 5] et y$\in$ [-5 ; 5].
Indiquer par lecture graphique le sens de variation de f sur [-10 ; -3 [$\cup$] –3 , 5] et dresser son tableau de variation.

III) Antécédents, équations

1°) Antécédents
<u>a) Définition</u> :Soit f une fonction définie sur un ensemble D. Si le réel x a pour image y, on dit que x est un **antécédent** de y par f.

<u>b) Savoir déterminer des antécédents par lecture graphique</u>

Exercice n°8 :



La courbe ci-contre représente une fonction f définie sur l'intervalle [-3 ; 4]

Déterminer par lecture graphique le (ou les) antécédent(s) s'il(s) existe(nt) de -2 , 3 et -2,5 par f

<u>c) Savoir déterminer des images ou antécédents à partir d'une expression algébrique</u>.

Exercice n°9 : On considère la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$
• Déterminer f(-2), f(0), f(1), f(5).
•Pour quelles valeurs de x a-t-on : f(x) = 1 ? f(x) = 4 ?

<u>d) Savoir déterminer des images ou antécédents à partir d'un tableau de variation.</u>

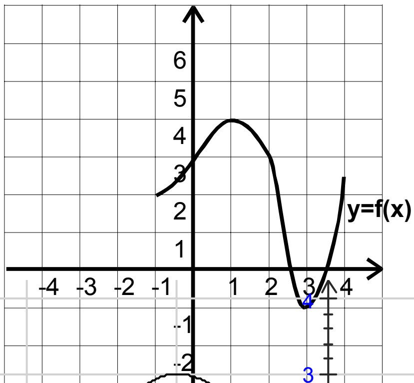
Exercice n°10 : on donne le tableau de variations d'une fonction f définie sur l'intervalle [1 ; 2].

x	1	1,3	1,7	2
Variation de f	2 ↘	1,7 ↘	1,5 ↘	-1

Donner l'image de 2 par f.
Donner l'image de 1,7 par f.
Donner l'antécédent de 2 par f.
Donner l'antécédent de 1,7 par f

2°) Savoir résoudre graphiquement (et rédiger) une équation du type f(x) = a

Exercice n°11 : On considère la fonction f dont on donne la courbe représentative C_f ci-contre.
Résoudre graphiquement l'équation (E) : f(x) = 3

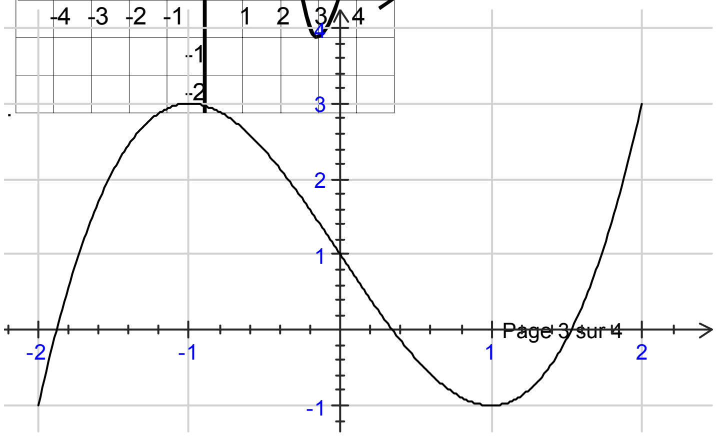


***3°)* Savoir résoudre graphiquement (et rédiger) une inéquation du type f(x) $\leq$a**

Exercice n°12 : On considère la fonction f de l'exercice n°11. Résoudre graphiquement l'inéquation (I) : f(x) $\leq$3

IV) Mettre en relation l'expression algébrique et la courbe représentative d'une fonction

Exercice n°13 : Soit (O ; I ; J) un repère orthogonal et C la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle [-2 ; 2].



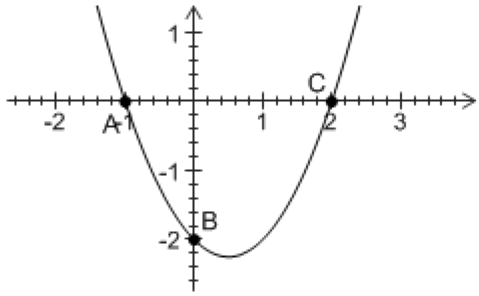
A. Première partie
a) A l'aide de la courbe C représentative de la fonction f, recopier et compléter le tableau de valeurs ci-après par lecture graphique :

x	-2	-1	0	1	2
f(x)					

b) Donner, s'il (s)existe(nt)les antécédents de –4, de 0 et de 3.
c) Indiquer le sens de variation de la fonction f.
Dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle [-2 ; 2].
d) Résoudre graphiquement, en expliquant la méthode, les équations suivantes :
f(x) = 1 et f(x) = 3.
e) Discuter, suivant les valeurs de k (k étant réel), le nombre de solutions de l'équation f(x) = k.
f) Résoudre graphiquement les inéquations f(x) >0 et $f(x) \leq 3$.
B. Seconde partie : La courbe C représentée sur le graphique ci-dessus est celle de la fonction f définie dans l'intervalle [-2 , 2] par : $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

a) Déterminer par le calcul les images de –1 et $\sqrt{2}$ par f.
b) Déterminer algébriquement les solutions exactes de l'équation f(x) = 1.

VI) Déterminer une fonction dont la représentation graphique est donnée (résolution de système)



Exercice n°14 : La courbe ci-contre est une parabole : c'est la courbe représentative d'une fonction de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$
Déterminer a, b et c en remarquant que la courbe passe par les points A (-1 , 0), B (0,-2) et C(2,0).

VI) Comparaison de fonctions :

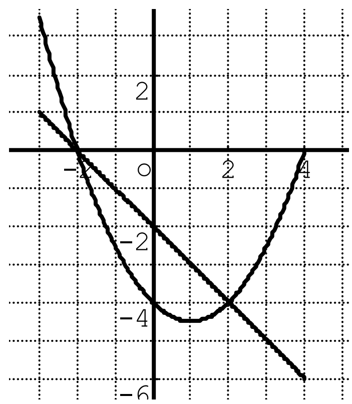
1°) Egalité de deux fonctions :

a) Définition : $\boxed{\text{les fonctions f et g sont égales sur D si et seulement pour tout réel x de D on a f(x) = g(x)}}$
b) application :
Exercice n° 15 : Démontrer que les fonctions f et g définies sur]-2, +∞ [respectivement par :
$f(x) = \dfrac{-2x^2 - 3x + 5}{x + 2}$ et g(x) = $-2x + 1 + \dfrac{3}{x + 2}$ sont égales.
c) Remarque :
Il ne faut pas confondre

Egalité de f et g sur D (l'égalité est vérifiée pour tous les réels x de D) et Equation f(x) = g(x) sur D (on cherche les réels x de D qui vérifient l'égalité)

2°) Etudier la position relative de deux courbes :

a) Par Lecture graphique :



Exercice n°16: Les fonctions f et g sont respectivement définies sur [-3 ; 4] par les courbe C_f et C_g
Utiliser ce graphique pour répondre aux questions suivantes :
- ♦ f(x) = g(x)
- ♦ f(x) < g(x)

b) Par le calcul
Suite de l'exercice n°16 : Les fonctions f et g sont respectivement définies sur [-3 ; 4] par
$f(x) = \dfrac{x^2}{2} - x - 4$ et g(x) = - x – 2 .
- ♦ Calculer f(x) – g(x)
- ♦ Vérifier que f(x) – g(x) = $\dfrac{(x-2)(x+2)}{2}$
- ♦ Résoudre l'équation f(x) = g(x).
- ♦ Etudier le signe de f(x) – g(x)
- ♦ Résoudre l'inéquation f(x) < g(x).

Méthode :

$f(x) \geq g(x)$ sur I équivaut à : la courbe représentative de f est située au dessus de la courbe représentative de g.