CHAPITRE ….: FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

I) Définition de la fonction logarithme népérien

1°) Définition :

la fonction **logarithme népérien** est la primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur]0, +∞[qui prend la valeur 0 pour x = 1

notation : $\begin{array}{l} \ln :]0,+\infty[\to R \\ x \qquad \mapsto \ln x \end{array}$

on a : **ln1 = 0**

Exercice n°1 :

a) Déterminer toutes les primitives de la fonction h : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur]0, +∞[(utiliser la définition ci-dessus).

Quelle est la primitive de h qui vaut -3 pour x = 1 ?

b) Calculer ln (x^2 – 1) pour x = $\sqrt{2}$ et pour x = - $\sqrt{2}$.

c) Déterminer une primitive sur l'intervalle donné de la fonction : $f(x) = \dfrac{3}{x}$ sur]0, +∞[. $f(x) = 2x - 3 - \dfrac{4}{x}$ sur]0, +∞[

Pour s'entraîner : exercices n°19 et 20 page 172 (calcul de primitive)

2°) Calculs de dérivées.

la fonction ln est une fonction nouvelle ; ce n'est ni une fonction polynôme, ni une fonction rationnelle.

la fonction ln est dérivable sur]0 , +∞[et, pour tout x de]0 , +∞[, (ln x)' = ln' x = $\dfrac{1}{x}$

Exercice n°2 : calculer la dérivée de la fonction f sur]0 , +∞[par :

a) f(x) = $x^2 + x + \ln x$ b) f(x) = 4 lnx c) f(x) = $\dfrac{1}{x} + \ln x$ d) f(x) = $\dfrac{\ln x}{x}$

e) f(x) = $x \ln x$ f) f(x) = $(\ln x)^2$

Pour s'entraîner : exercices n°14 page 172 et 47, 48, 52 à 55 page 176 (calcul de dérivées).

3°) Ensemble de définition : on ne peut pas calculer le logarithme d'un nombre négatif, ni de 0.

Exercice n°3 :
a) indiquer parmi les valeurs de x suivantes celles pour lesquelles le nombre ln (x+2) existe :
10 ; 5,1 ; 0; -0,5 ; -1 ; -2 ; -3 ; -11 .

b) On considère la fonction f définie par f(x) = ln (1 – x). Résoudre dans ℝ l'inéquation 1 - x > 0. En déduire les valeurs de x pour lesquelles f(x) existe.

II) Etude de la fonction ln

1°) Sens de variation et courbe représentative.
Exercice n°4 :
a) Etudier les variations de la fonction logarithme népérien (calcul de la dérivée, étude du signe de la dérivée et tableau de variation).

b) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant en utilisant la touche LN d'une calculatrice.

x	0,1	0,5	1	2	3	4	6
ln x							

Tracer la courbe représentative de la fonction logarithme dans un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

2°) Limites.
Suite de l'exercice n°4 :
c) Recopier et compléter le tableau suivant :

x	10	1 000	10^6	10^9
ln x				

Nous constatons que ln x augmente "lentement" quand x augmente : pour x = 1 milliard, ln x est encore voisin de 20.

CHAPITRE ….: FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

Est-ce que ln x peut dépasser 100?

Nous admettrons que : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty}$.

d) Recopier et compléter le tableau suivant :

x	0,1	0,001	10^{-6}	10^{-9}
ln x				

Nous admettrons que : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty}$. En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe (écrire son équation).

Pour s'entraîner : exercice n°10 page 172 et 42 page 175.

3°) Nombre e.

Suite de l'exercice n°4 :
e) On observe sur le graphique qu'il existe un nombre x pour lequel on a ln x = 1. On note e ce nombre : **ln e = 1.**
Compléter le tableau suivant :

x	2,6	2,7	2,8	2,9
ln x				

En déduire la valeur de e arrondie à 0,1 près.

4°) Résolutions graphiques
Suite de l'exercice n°4 :
f) A l'aide d'une calculatrice et du graphique, donner une valeur approchée du réel x tel que ln x = 2.
g) Reprendre le f) avec ln x = -1.

Propriété : **Pour tout réel y, l'équation ln x = y admet une solution et une seule**

h) Résoudre en utilisant le graphique l'inéquation ln x > 0.
i) Résoudre en utilisant le graphique l'inéquation ln x < 0.

5°) Résolution d'équations et d'inéquations :

a) Propriétés :

Pour a > 0 et b > 0 on a : ln a = ln b ⇔ a = b
ln a < ln b ⇔ a < b

b) Savoir résoudre une équation ou une inéquation comportant un logarithme.

Exercice n°5 : Résoudre dans $\left]\frac{1}{5};+\infty\right[$ l'équation (E) : ln (5x –1) = 0.

Exercice n°6 : Résoudre dans $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ l'inéquation: ln (2x –3) > 1

Exercice n°7 : Etudier les variations de la fonction f définie sur]0, +∞[par f(x) = xlnx –2x.

Pour s'entraîner : exercices n°1 et 7 page 171. Exercices °30 et 34 page 175

c) Cas particuliers :

ln x = 0 ⇔ x = 1
ln x < 0 ⇔ 0 < x < 1
ln x > 0 ⇔ x > 1

Exercice n°8 : Etudier le signe de la fonction f définie sur]0, +∞[par **f(x) = (x-1) lnx.**

Pour s'entraîner : exercices n°2 et 8 p 171, n°35, 37 p 175.

CHAPITRE ….: FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

III) Formules algébriques :

1°) Découvrir les propriétés algébriques de la fonction ln :

Exercice n°9 :

a) Reproduire le tableau et le compléter à l'aide d'une calculatrice (valeurs arrondies à 0,01 près).

x	y	ln x + ln y	ln (xy)
2	3		
3	5		
1,2	5,4		
13	2		
1	2		

proposer une relation entre ln x, ln y et ln (xy)

b) Reproduire le tableau et le compléter à l'aide d'une calculatrice (valeurs arrondies à 0,01 près).

x	lnx	$\ln\left(\frac{1}{x}\right)$	ln x^2	ln(x^3)
2				
3				
	1			
15				

proposer une relation entre ln $\left(\frac{1}{x}\right)$ et ln x, entre ln x^2 et ln x, entre ln x^3 et ln x.

2°) Formules fondamentales :

Pour a > 0 et b > 0 : ln (ab) = ln a + ln b

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

ln (a^n) = n ln a avec n entier relatif.

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$$

3°) Applications :

Exercice n°10 : simplification d'une expression où figurent des logarithmes :

a) Ecrire plus simplement : A = $\frac{1}{2}\ln e - 5\ln e^2 - \ln\frac{1}{e}$

b) Calculer en fonction de ln 2 : B = ln 2 + ln (4e) – ln (16e^2)

Exercice n°11 : résoudre dans]0 ; +∞[:

a) l'équation ln x = 2

b) l'inéquation ln x ≤ 2

Exercice n°12 : Bac STT CG et IG juin 1998

Soit P la fonction polynôme, définie sur ℝ par P(x) = $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$

a) Montrer que : P(x) = (2x + 1) (x^2 + x – 6) puis résoudre l'équation P(x) = 0.

b) Résoudre dans ℝ l'équation : $2(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 11\ln x - 6 = 0$

Pour s'entraîner : exercices n°3 à 6 page 171, n°9 p 172.

IV) Dérivée de ln[(u(x)]

1°) Théorème :

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I. La fonction f définie sur I par f(x) = ln [u(x)] est dérivable sur I et f'(x) = $\frac{u'(x)}{u(x)}$.

2°) Application : ***Exercice n°13*** : Etudier les variations de la fonction f définie sur ℝ par f(x) = ln ($3x^2$ + 2x + 1) .

Pour s'entraîner : exercices n°18 page 172, n°49 à 51 page 176.

CHAPITRE ….: FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

V) Limites :

1°) Comparaison de lnx et x^n.

Exercice n°14 : a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x$. Peut-on conclure directement pour $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$?

b) Recopier et compléter le tableau suivant :

x	100	1 000	10^6	10^9
$\frac{\ln x}{x}$				

On admettra que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0}$. Ce résultat peut se retenir sous la forme imagée suivante : « x l'emporte sur ln en +∞ ».

Conséquence : Pour tout nombre entier naturel non nul n, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0}$

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x$ et $\lim\limits_{x\to0} x$. Peut-on conclure directement pour $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x$?

d) Recopier et compléter le tableau suivant :

x	0,01	0,001	10^{-6}	10^{-9}
xln x				

Nous admettrons que : $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0}$. Ce résultat peut se retenir sous la forme imagée suivante : « x l'emporte sur ln en 0 ».

Pour s'entraîner : exercices n°11 et 12 page 172. n°44 et 45 p 175.

2°) Exercice n°27 page 173

3°) Limites de fonctions composées : limite de ln[u(x)]

Exercice n°15 : Soit la fonction f définie sur]-∞,0[par f(x) = $\ln\left(x^2 - x\right)$. On souhaite déterminer les limites de f en 0 et en -∞. Pour cela, on pose $X = x^2 - x$.

a) déterminer $\lim\limits_{x\to0^-} X$. Soit λ le résultat obtenu, déterminer $\lim\limits_{X\to\lambda} \ln X$ puis en déduire $\lim\limits_{x\to0^-} \ln\left(x^2 - x\right)$.

b) déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} X$ . . Soit λ le résultat obtenu, déterminer $\lim\limits_{X\to\lambda} \ln X$ puis en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(x^2 - x\right)$.

Exercice n°16 : Soit la fonction f définie sur]0,+∞[par f(x) = $\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$. On souhaite déterminer les limites de f en 0 et en +∞.

Pour cela, on pose $X = \frac{x}{x+1}$.

a) déterminer $\lim\limits_{x\to0^+} X$ puis $\lim\limits_{x\to0^+} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

b) déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} X$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

Pour s'entraîner : exercice n° 46 page 176

VI) Primitive de $\frac{u'}{u}$

1°) Théorème :

Soit u une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur un intervalle I.

La fonction définie par f(x) = $\frac{u'(x)}{u(x)}$ admet sur I pour primitives :

$x \mapsto \ln[u(x)] + C$, si u(x) > 0 sur I,

$x \mapsto \ln[-u(x)] + C$, si u(x) < 0 sur I, où C est une constante réelle.

2°) Application :

Exercice n°17 : exercice n°19 p 172

Pour s'entraîner : exercices n°20 à 26 page 172. Exercices n°56 à 63 page 176.