

CHAPITRE: APPLICATION DE LA DÉRIVATION

I) Dérivation, sens de variation et extremum

1°) Dérivation et sens de variation

Théorème 1 :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

Si, pour tout x de I , $f'(x)$ est strictement positif, alors f est strictement croissante sur I .

Si, pour tout x de I , $f'(x)$ est strictement négatif, alors f est strictement décroissante sur I .

Si, pour tout x de I , $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I .

Théorème 2 :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

Si la dérivée f' s'annule en changeant de signe en x_0 , alors cette fonction présente en ce point soit un maximum, soit un minimum

2°) Application

Exercice n° 1 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 2x - 1$

a) Soit f' la fonction dérivée de f . Calculer $f'(x)$.

b) Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .

c) En déduire le sens de variation de f .

d) Dresser le tableau de variation de f .

Exercice n° 2 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 - 2x$

a) Calculer sa fonction dérivée.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ en fonction de x .

c) En déduire le sens de variation de f .

d) Dresser le tableau de variation de f .

II) Fonction dérivable et strictement monotone sur $[a,b]$. Résolution approchée d'équations de la forme $f(x) = 0$

1°) Activité 1 : voir feuille polycopiée.

2°) Théorèmes admis :

Théorème 3 :

Si f est dérivable et strictement croissante sur $[a,b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[a,b]$.

Théorème 4 :

Si f est dérivable et strictement décroissante sur $[a,b]$ et si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule dans $[a,b]$.

Remarques :

Une fonction peut être strictement monotone sur $[a, b]$ bien que $f'(x)$ s'annule pour un élément de $]a, b[$: c'est le point de $f(x) = x^3$ qui est strictement croissante sur $[-2, 2]$ bien que $f'(0) = 0$.

Ces théorèmes sont notamment utilisés pour justifier l'existence de solutions pour une équation, en particulier lorsqu'on ne sait pas la résoudre directement, à l'aide du calcul algébrique.

3°) Application : *Exercice n° 3 :*

Soit l'équation $x^3 + 2x + 1 = 0$.

Nous ne savons pas la résoudre algébriquement.

On se propose de démontrer qu'il existe une solution unique α dans $] -1, 0 [$

Soit la fonction définie sur $[-1, 0]$ par $f(x) = x^3 + 2x + 1$ et soit (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, unités : 10 cm pour 1 sur l'axe des abscisses et 5 cm pour 1 sur l'axe des ordonnées.

a) Étudier les variations de f sur $[-1, 0]$ c'est à dire :

b) Calculer sa dérivée $f'(x)$. b) Déterminer le signe de la dérivée. c) Faire le tableau de variation de f .

c) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $[-1, 0]$.

d) Compléter le tableau de valeurs suivant dans lequel chaque valeur approchée sera donnée à 10^{-2} près.

x	-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0
$f(x)$											

e) Utiliser le tableau du 3°) pour donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}

f) Construire la courbe (C). Placer le point A de C d'abscisse α sur la figure.

III) Exemple d'étude de fonction rationnelle

CHAPITRE: APPLICATION DE LA DÉRIVATION

Exercice n°4 : Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 1}{x^2 - 2x + 5}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm)

1°) Étudier les variations de f.

2°) Construire la courbe (C).

3°) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à (C) au point A d'abscisse 1. La tracer.

4°) Soit D la droite d'équation $y = \frac{1}{8}(9x + 7)$. Tracer D sur le même graphique que (C). Résoudre graphiquement : $f(x) = \frac{1}{8}(9x + 7)$

5°) Déterminer les coordonnées des points d'intersections de la courbe (C) et de l'axe des abscisses.

6°) Résoudre graphiquement a) $f(x) = -1$; b) $f(x) = 2$; c) $f(x) < 2$

7°) a) Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-10	-100	-1000	
f(x)				

Compléter la phrase : lorsque x tend vers $-\infty$, f(x) tend vers

b) Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	10	100	1000	
f(x)				

Compléter la phrase : lorsque x tend vers $+\infty$, f(x) tend vers

On dit alors que la droite d'équation $y = 2$ est une **asymptote horizontale** de la courbe C.