

CHAPITRE: PRIMITIVES

I) Dérivée de fonctions composées

1°) Dérivée de u^n :
théorème :

Soit n un nombre entier positif,
Soit u une fonction dérivable sur I ;
Si $f(x) = [u(x)]^n$, alors $f'(x) = n[u(x)]^{n-1} u'(x)$.

De façon plus condensée : $(u^n)' = nu^{n-1}u'$

Exercice n°1 : Déterminer la fonction dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g : t \mapsto (3t+1)^5$

Pour s'entraîner : exercices n°1 à 4 page 154 et exercices n° 20 à 24 page 156.

2°) Dérivée de $\sqrt{u}$:

Si u est dérivable et strictement positive sur un intervalle I , alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Exercice n°2 : Déterminer la fonction dérivée de la fonction g définie sur $[-\frac{1}{3}; +\infty[$ par $g : t \mapsto \sqrt{3t+1}$.

II) Primitives d'une fonction

1°) **Activité d'approche** :

Exercice n°3 : trouver une fonction dont on connaît la dérivée.

a) Parmi les fonctions suivantes, indiquer celles qui ont pour dérivée la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2$

$g(x) = x^2$; $h(x) = x + 2$; $j(x) = 2x + 8$; $k(x) = 2x - 1$.

b) Parmi les fonctions suivantes, indiquer celles qui ont pour dérivée la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$

$g(x) = x^2 + x$; $h(x) = 2x^2 + x$; $j(x) = x^2 + x + 1$; $k(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$.

c) Parmi les fonctions suivantes, indiquer celles qui ont pour dérivée la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x + 1$

$g(x) = x^3 + x^2 + x$; $h(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$; $j(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + \sqrt{2}$.

d) On donne la fonction f définie sur $] -2 ; +\infty [$ par $f(x) = \frac{1}{x+2}$. Calculer la dérivée f' de f .

Parmi les fonctions suivantes, indiquer celle qui a pour dérivée la fonction g définie sur $] -2 ; +\infty [$ par : $g(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$

$K(x) = \frac{3}{x+2}$; $G(x) = \frac{-3}{x+2}$; $H(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+2}$.

e) Déterminer trois fonctions dont la dérivée est la fonction f définie sur $] 0 ; +\infty [$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

2°) Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .
Une fonction F dérivable sur I est une primitive de f si pour tout x de I , $F'(x) = f(x)$.

Exercice n°4 : Soit F_0 et f deux fonctions définies sur $I =]-\frac{3}{4}; +\infty[$ respectivement par : $F_0(x) = \frac{2x-1}{4x+3}$ et $f(x) = \frac{10}{(4x+3)^2}$.

Démontrer que F_0 est une primitive de f sur I .

3°) Théorème 1 (admis) : **toute fonction dérivable sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle.**

Exercice n°5 : On considère deux fonctions f et g : $f : x \mapsto 3$ définie sur $\mathbb{R}$ $g : x \mapsto \frac{-1}{x^2}$ définie sur $]0, +\infty[$

a) Expliquer pourquoi ces deux fonctions admettent des primitives sur leur intervalle de définition.

b) En consultant le tableau des dérivées, trouver une primitive de f sur $\mathbb{R}$ et une primitive de g sur $]0, +\infty[$

c) En déduire toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$ et toutes les primitives de g sur $]0, +\infty[$.

d) Quelle est la primitive F_0 de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F_0(-1) = 5$? Quelle est la primitive G_0 de g sur $]0, +\infty[$ telle que $G_0(3) = -2$?

4°) Théorème 2 :

Soit F une primitive de la fonction f sur un intervalle I .
Les autres primitives de f sur I sont les fonctions définies sur I par : $x \mapsto F(x) + C$, où C est une constante.

Exemple : les primitives de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 3$ sont les fonctions $x \mapsto x^3 - 3x + C$ où C est une constante réelle.

III) Recherche de primitives

1°) Tableau de primitives des fonctions usuelles :

CHAPITRE: PRIMITIVES

La fonction f est définie par	a	x	x^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$
Sur	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$
Les primitives F de f sont définies par					

Exercice n°6 : Dans chacun des cas déterminer une primitive F de la fonction f définie sur I.

a) $f(x) = x^3$, $I = \mathbb{R}$ b) $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $I =]0, +\infty[$ c) $f(x) = 2$, $I = \mathbb{R}$

2°) Opérations sur les primitives :

a) Produit par une constante : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et k une constante réelle. Si F est une primitive sur I de f, alors **kF est une primitive sur I de kf**.

Exercice n°7 : Dans chacun des cas suivants déterminer une primitive F de la fonction f définie sur I.

$f(x) = \frac{x^4}{3}$, $I = \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{3}{x^2}$, $I =]-\infty, 0[$.

b) Somme de deux fonctions : Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si F est une primitive sur I de f, et si G est une primitive sur I de g alors **F + G est une primitive sur I de f + g**.

Exercice n°8 : Dans chacun des cas suivants déterminer une primitive F de la fonction f définie sur I.

$f(x) = 1 + x + x^2$ $I = \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 9x - 6$ $I = \mathbb{R}$, $f(x) = 5x^3 - \frac{7}{x^2}$ sur $] -\infty, 0[$ déterminer la primitive telle que $F(-1) = 1$.

3°) Primitives de certains produits et de certains quotients : soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

a) Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

On sait que $(u^2)' = 2uu'$, donc une primitive d'une fonction de la forme uu' est $\frac{1}{2}u^2$.

On sait que $(u^3)' = 3u^2u'$, donc une primitive d'une fonction de la forme u^2u' est $\frac{1}{3}u^3$.

Théorème 3 :

Soit u une fonction dérivable sur I. Pour tout réel α différent de -1 , la fonction $u'u^\alpha$ a pour primitives sur I : $\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$

Exercice n°9 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x-12)(x^2-8x-2)^5$.

Déterminer une fonction u et un réel k tels que f(x) s'écrive sous la forme : $f(x) = k \times u'(x) \times [u(x)]^3$

Exercice n°10 : Dans chacun des cas déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$:

$f(x) = x(x^2+1)^2$; $f(x) = (3x+1)^2$ $f(x) = (2x+3)(x^2+3x+4)$ $f(x) = (4x-3)^3$

b) On sait que, si u ne s'annule pas sur I, $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

Donc une primitive d'une fonction de la forme $-\frac{u'}{u^2}$ est $\frac{1}{u}$. Autrement dit une primitive de $\frac{u'}{u^2}$ est $-\frac{1}{u}$.

Exercice n°11 : Déterminer une primitive F de la fonction f définie sur $I = [0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{(5x+1)^2}$

Exercice n°12 : Soit la fonction définie sur $I =]\frac{1}{4}, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{16x^2 - 8x + 3}{(4x-1)^2}$

a) Expliquer pourquoi cette fonction admet des primitives sur l'intervalle I.

b) Calculer les réels a et b tels que : pour tout x élément de $] \frac{1}{4}, +\infty[$, $f(x) = a + \frac{b}{(4x-1)^2}$.

c) En déduire les primitives de f sur l'intervalle I.