CORRECTION DU DM n°3

Exercice n°92 page 107 : Exemple d'étude des variations d'une fonction rationnelle : $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+x+1}$ sur [-4 , 4]

1°) Calcul de la dérivée : $f'(x)=\dfrac{(4)(x^2+x+1)-(4x)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=\dfrac{4x^3+4x+4-8x^3-4x}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\dfrac{-4x^2+4}{\left(x^2+x+1\right)^2}$. $\boxed{f'(x)=\dfrac{-4(x^2-1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}}$

2°) Etude du signe de la dérivée.

a) $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{-4(x^2-1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}=0 \Leftrightarrow -4(x^2-1)=0 \Leftrightarrow -4(x+1)(x-1)=0$. Conclusion : $\boxed{\text{f'(x) = 0 a deux solutions : -1 et 1}}$.

b) Un carré est toujours positif donc f'(x) est du signe de son numérateur c'est à dire du signe de $-4x^2+4$

Soit Δ le discriminant de $-4x^2+4$ **:** $\Delta > 0$.

Théorème : Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$. Si $\Delta > 0$: P(x) est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de -a à l'intérieur.

Donc $-4x^2+4 \geq 0$ pour tout x appartenant à [-1,1] (puisque a = -4) et $-4x^2+4 \leq 0$ pour tout x appartenant à $]-\infty, -1] \cup [$ **1,** $+\infty[$.

c) Tableau de variation :

x	-4		-1		1		4
Signe de $-4x^2+4x$		-	0	+	0	-	
Signe de $\left(x^2+x+1\right)^2$		+		+		+	
Signe de f '(x)		-	0	+	0	-	
Variations de f	$-\dfrac{16}{13}$	↘	-4	↗	$\dfrac{4}{3}$	↘	$\dfrac{16}{21}$

$f(-4)=\dfrac{-16}{16-4+1}=-\dfrac{16}{13}$ $\quad f(-1)=\dfrac{-4}{1-1+1}=-4$ $\quad f(1)=\dfrac{4}{1+1+1}=\dfrac{4}{3}$ $\quad f(4)=\dfrac{16}{16+4+1}=\dfrac{16}{21}$

Exercice n°102 page 110 : exemple d'étude des variations d'une fonction polynôme du troisième degré et d'étude d'équation f(x) = 0. $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 2$

1°) a) $f'(x) = -6x^2+6x = 6x(-x+1)$.

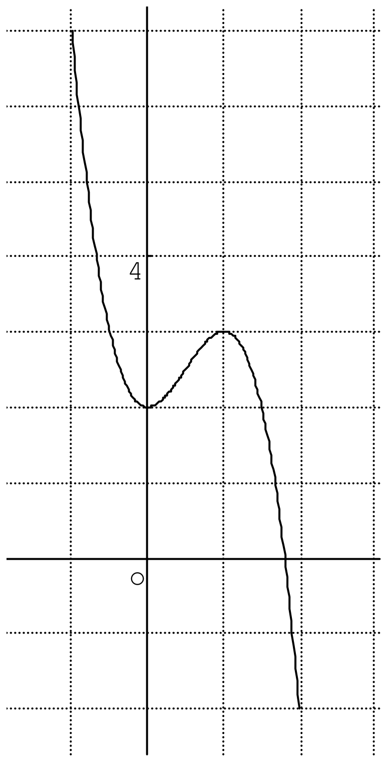
b) $f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x(-x+1)=0 \Leftrightarrow 6x=0$ ou $-x+1=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$. Conclusion : $\boxed{\text{f'(x) = 0 a deux solutions 0 et 1}}$.

Soit Δ le discriminant de $-6x^2+6x+0$ **:** $\Delta > 0$.

D'après le théorème cité dans l'exercice précédent :

$-6x^2+6x$ est du signe de a c'est à dire négatif pour tout x appartenant à $]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$ et $-6x^2+6x \geq 0$ pour tout x appartenant à [0,1]

x	-1		0		1		2
$-6x^2+6x$		-	0	+	0	-	
Signe de f'(x)		-	0	+	0	-	
Variations de f	7	↘	2	↗	3	↘	-2



2°) Théorème :

Si f est dérivable et strictement décroissante sur [a,b] et si f(a) et f(b) sont de signes contraires, alors l'équation f(x) = 0 admet une solution et une seule dans [a,b].

Dans le cas présent, f est dérivable et strictement croissante sur [1 , 2], f(1) et f(2) sont de signes contraires donc f(x) = 0 admet une solution et une seule notée α dans [1, 2].

De plus pour tout x de [-1 , 1] f(x) > 2 (voir tableau de variation) donc f(x) = 0 n'a pas de solution dans [-1 , 1].

Conclusion : f(x) = 0 admet une solution et une seule dans [-1 , 2] : cette solution est comprise entre 1 et 2.

3°) Tableau de valeurs :

x	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
f(x)	7	3	2	2,5	3	2	-2

4°) $f(1,8) \approx 0,056$ et $f(1,9) \approx -0,888$

$f(1,8) \approx 0,056$ et $f(1,81) \approx -0,0312$

f est dérivable et strictement croissante sur [1,8 ; 1,81], f(1,8) et f(1,81) sont de signes contraires donc α appartient à [1,8; 1,81].

CORRECTION DU DM n°3

Exercice n°85 page 106 : exemple d'étude des variations d'une fonction polynôme du troisième degré

1°) a) Par lecture graphique :
Pour déterminer f(1) on cherche l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 1 : f(1) = -5.
De même f(-1) = -9.
b) f '(1) est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1. Or cette tangente est parallèle à l'axe des abscisses donc f '(1)= 0.
et f '(0) > 0 car la fonction est strictement croissante sur [-1 , 1].

2°) Tableau de variation :

x	-3		-1		1		2
Signe de f '(x)		-	0	+	0	-	
Variation de f	11	↘	-9	↗	-5	↘	-9

3°) $f(x) = ax^3 + cx + d$

a) $f'(x) = 3ax^2 + c$
b) $f(x) = ax^3 + cx + d$
donc $f(1) = a\times1^3 + c\times1 + d = a + c + d$.
Or f(1) = -5 donc a + c + d = -5.

$f(-1) = a\times(-1)^3 + c\times(-1) + d = -a - c + d$
Or f(-1) = -9 donc –a –c + d = -9

$f'(x) = 3ax^2 + c$ donc f'(1) = 3a + c.
Or f'(1) = 0 donc 3a + c = 0

D'où le système : $\begin{cases} a + c + d = -5 \\ -a - c + d = -9 \\ 3a + c = 0 \end{cases}$

On additionne membre à membre les deux premières équations et on obtient : 2d = -14 d'où $\boxed{d = -7}$.

On remplace d par –7 dans le système donc $\begin{cases} a + c - 7 = -5 \\ -a - c - 7 = -9 \\ 3a + c = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} a + c = 2 \\ 3a + c = 0 \end{cases}$

On soustrait les deux équations et on obtient : -2a = 2 d'où a = -1.

Finalement c = 2 – (-1) = 3 .

Conclusion : $\boxed{a = -1,\ c = 3 \text{ et } d = -7 \text{ et donc } f(x) = -x^3 + 3x - 7}$

4°) a) On cherche les abscisses des points de la courbe situés sur la droite d'équations y = -7.
Donc l'équation f(x) = -7 a trois solutions. (ou encore : sur la courbe, il y a trois points d'ordonnée –7).
b) l'équation f(x) = -5 a deux solutions : -2 et 1.
On a cherché les abscisses des points de la courbe situé sur la droite d'équation y = -5.