CHAPITRE N°….. : REPERAGE DES VECTEURS DU PLAN

\\Pc2\c2\Mes documents PC2\AL PC2\Secondes\Cours Secondes\Repérage dans le plan\reperage_vecteurs_plan.doc

I) Repérage dans une base :

1°) Base :

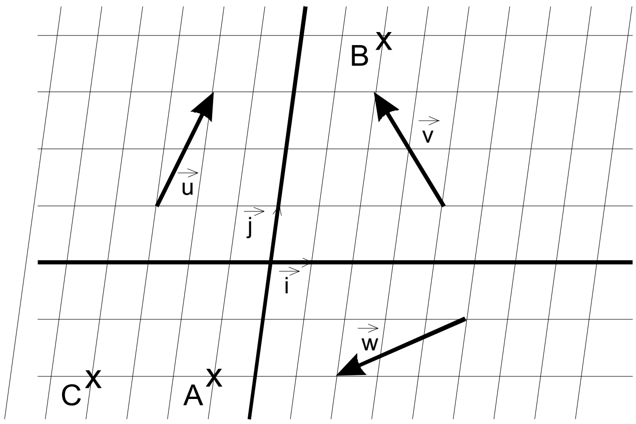
a) Définition :

Deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ **non colinéaires**, pris dans cet ordre forment une base des vecteurs du plan.

On note cette base ($\vec{i}$, $\vec{j}$).

b) Conséquence : tous les vecteurs du plan pourront être exprimés en fonction de ces deux vecteurs non colinéaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Exercice n°1 **:** Exprimer un vecteur dans une base.



En effectuant une lecture graphique de la figure, exprimer les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

2°) Coordonnées d'un vecteur dans une base :

a) Théorème :

Soit ($\vec{i}$, $\vec{j}$) une base de l'ensemble des vecteurs du plan. Tout vecteur $\vec{u}$ se décompose de manière unique sous la forme $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ (où x et y sont deux nombres réels).

b) Définition :

Dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$) , le vecteur $\vec{u}$, défini par la relation : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ a pour coordonnées (x ; y) .

x s'appelle l'abscisse du vecteur $\vec{u}$ dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$) et y s'appelle l'ordonnée du vecteur $\vec{u}$ dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$).

On écrit simplement $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ou $\vec{u}(x, y)$

c) Savoir lire les coordonnées d'un vecteur sur un graphique et tracer des représentants de vecteurs dont on connaît les coordonnées.

Exercice n°2 **:** Reprendre la figure 1.

Indiquer les coordonnées des vecteurs dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$).

Tracer un représentant des vecteurs $\vec{z}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{t} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$.

Préciser les coordonnées des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{r}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{x} = 2(\vec{i} + \vec{j}) - 3\vec{j}$; $\vec{y} = -\frac{3}{2}(\vec{i} - \vec{j})$; $\vec{r} = \frac{5}{3}\vec{j}$

Pour s'entraîner exercices n°58 3°) page 153, 74 b) page 155, 82 1°)a) page 156.

II) Coordonnées de vecteurs : propriétés

1°) Activité d'approche : voir exercice n°1 du TD n° …

Dans tout ce qui suit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$

2°) Egalité de vecteurs :

CHAPITRE N°….. : REPERAGE DES VECTEURS DU PLAN

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées. $\vec{u} = \vec{u'} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ \text{et} \\ y = y' \end{cases}$

3°) Somme de vecteurs :

Pour calculer les coordonnées de la somme de deux vecteurs, on ajoute leurs coordonnées : $\vec{u} + \vec{u'} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$,

4°) Produit d'un vecteur par un réel :

Si on multiplie un vecteur par k, ses coordonnées sont multipliées par k. $k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

5°) Application :

Exercice n°3 : Soit les vecteurs $\vec{u} = 6\vec{i} - 2\vec{j}$ et $\vec{u'}(7 ; 4)$. Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{u} + \vec{u'}$, $3\vec{u'}$, $\frac{1}{2}\vec{u} - 3\vec{u'}$

Pour s'entraîner : exercice n°81 page 156.

6°) Colinéarité de deux vecteurs.

a) ***Exercice n°4*** *:* Donner trois vecteurs colinéaires au vecteur $\vec{u}\ (-\frac{2}{3}, 2)$

*b) A*ctivité d'approche : voir exercice n°2 du TD n° . . ..

c) Théorème :

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$:

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si xy'-x'y = 0

d) Application : reconnaître des vecteurs colinéaires (méthode L page 143)

Exercice n°5 : Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{u'}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = 1{,}5\vec{i} + 2\vec{j}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont-ils colinéaires ? Et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$?

Pour s'entraîner : exercice n°67 et 68 page 154.

III) Repère du plan :

1°) Repère

Définition : On appelle repère cartésien tout triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel :
- O est un point du plan, appelé origine du repère
- $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base du plan

L'axe $(O, \vec{i})$ est appelé « axe des abscisses » et l'axe $(O, \vec{j})$ « axe des ordonnées »

2°) Coordonnées d'un point d'un vecteur :

a) Propriété :

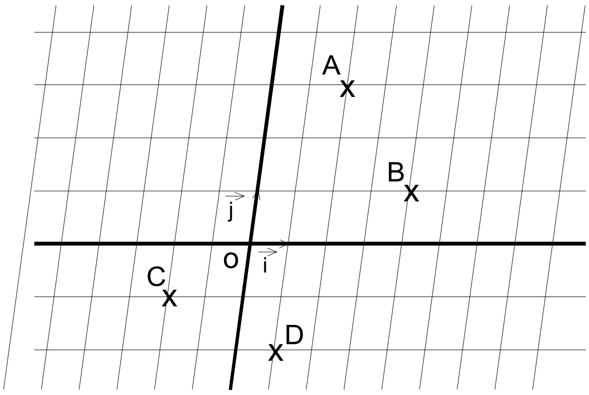
Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan et M un point quelconque

Les trois phrases suivantes sont équivalentes :

- $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$
- Le point M a pour couple de coordonnées (x , y)
- Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour couple de coordonnées (x ,y).

b) Déterminer des coordonnées dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Exercice n°6 :



On considère le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

♦Placer le point M tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{i}+2\vec{j}$. Quels sont les coordonnées de M dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$?

♦ Placer le point P tel que $\overrightarrow{AP}=-2\vec{i}-\vec{j}$

♦Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$ en fonction des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

♦Même énoncé que le 3°) pour les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DC}$.

Pour s'entraîner : exercices n°58 page 156 et 85 page 157

c) Déterminer des coordonnées dans un repère autre que $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (Méthode I page 141) : *exercice n°61 page 153*

Pour s'entraîner : exercices n°76 page 155, 78 page 156, 88, 89 et 91 page 157.

3°) Coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et coordonnées du milieu d'un segment

a) Théorème :

> Dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, si les coordonnées des points A et B sont $\left(x_A,y_A\right)$ et $\left(x_B,y_B\right)$alors :
>
> - Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\left(x_B-x_A,y_B-y_A\right)$.
>
> - Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2},\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$.

b) ***Exercice n°7*** : Soient A (-2 ; 4) ,et C (4 ; 6) dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

Déterminer les coordonnées du vecteur du $\overrightarrow{AC}$, et les coordonnées du milieu I de [AC]

Pour s'entraîner : exercices n°80 page 156

4°) Démontrer avec des coordonnées (méthode J page 141) : *exercice n°63 page 153*

Pour s'entraîner : exercices n°64 1°) page 154

5°) Calculer les coordonnées d'un point (méthode K page 141) :

Exercice n°8 : Soient A (-2 ; 4) , B (-3 ; 5) et C (4 ; 6) dans un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.Faire une figure

a) Calculer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme .
b) Calculer les coordonnées du point M tel que : $\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{BM}+3\overrightarrow{CM}=\vec{0}$
c) Calculer les coordonnées du point N symétrique de A par rapport à C

Pour s'entraîner : exercices n°65 et 66 page 156 et 85 page 157 exercices n°80 page 156 et 85 page 157

6°) Coordonnées et colinéarité : (Montrer un alignement et un parallélisme)

Exercice 9 *:* Les points A , B , C sont-ils alignés ?

a) A(2 ; 3) , B (5 ; 7) , C (-7 ; -9) .
b) A (5 ; 7) , B (0 ; 1) et C ($-\dfrac{3}{4}$,0) .

Exercice 10 *:* Les droites (AB) et (CD) sont - elles parallèles ?

a) A (2 ; 1) , B (5 ; -3) , C (0 ; 3) et D (6 ; -5) .
b) A ($-\dfrac{5}{2};\dfrac{7}{2}$) , B ($\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}$) , C (5 ; -2) et D (-1 ; $\dfrac{5}{2}$)

Exercice 11 *:* Soit $\vec{m}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}x+3\\2x-5\end{pmatrix}$. Trouver x pour que $\vec{m}$ et $\vec{n}$ soient colinéaires . Trouver alors le réel k tel que $\vec{m}=k\,\vec{n}$.

Pour s'entraîner : exercices n°69, 70 et 71 page 154. n°87 à 89 page 157

IV) Cas particulier le repère orthonormal

1°) **Base orthogonale** :

CHAPITRE N°….. : REPERAGE DES VECTEURS DU PLAN

Définition : une base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ des vecteurs du plan est orthogonale lorsque les directions des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont perpendiculaires.

2°) **Norme d'un vecteur** (rappel) : une unité de longueur est choisie dans le plan

a) Définition : soit $\vec{u}$ un vecteur, A et B deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

On appelle norme du vecteur $\vec{u}$ la longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$. On note $\left\|\vec{u}\right\| = AB$ et on lit "la norme du vecteur $\vec{u}$ est égale à la distance AB". En particulier $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$

b) Vecteur unitaire : on appelle vecteur unitaire (ou vecteur normé) tout vecteur de norme 1.

3°) Base orthonormale , repère orthonormal

Définition : une base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ est orthonormale (ou encore orthonormée) lorsqu'elle est orthogonale et que $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont unitaires.

Un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est orthonormal (ou orthonormé) lorsque la base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ est orthonormale.

Autrement dit :

$\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ orthonormé signifie $\begin{cases} \vec{i}\perp\vec{j} \\ et \\ \left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 1 \end{cases}$

C'est à dire: les axes de coordonnées sont perpendiculaires
et on utilise la même unité pour graduer les deux axes

4°) Norme d'un vecteur, distance de deux points

a) Propriété: calcul de la norme d'un vecteur

Soit un vecteur $\vec{u}$ de couple de coordonnées (x, y) dans une base orthonormale $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$, on a $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) Savoir calculer la norme de vecteurs en base orthonormale.

Exercice n°12 *:* Soit $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ une base orthonormale du plan. Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$

Faire une figure. Calculer $\left\|\vec{u}\right\|$, $\left\|\vec{v}\right\|$ et $\left\|\vec{w}\right\|$.

5°) Distance de deux points

a) Propriété: calcul de la distance de deux points

La propriété précédente généralise la relation déjà utilisée au collège:
Soit deux points A (x_A,y_A) et B(x_B,y_B) dans un repère orthonormal $AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$

b) Savoir calculer des distances en repère orthonormal (voir méthode N page 143)

Exercice n°13 : Placer les points A (1,2),B (3,-1) et C (9,3) dans un repère orthonormal. Le triangle ABC est-il rectangle ?

Pour s'entraîner exercices n°72 et 73 page 143, exercices n°95 à 98 page 158