CHAPITRE ….. : ORDRE, INTERVALLES ET VALEURS ABSOLUES.

I) Comparaison de nombres :

1°) **Définition** : comparer deux nombres a et b, c'est préciser laquelle de ces trois situations est la bonne :
$a < b$ $a > b$ $a = b$

2°) **Différentes méthodes pour comparer deux nombres** :

a) Comparer les nombres à 0 ou 1.

Propriété 1 : Si $a < b$ et $b < c$ alors $a<c$.
Ainsi pour comparer deux nombres, on peut parfois les comparer à un troisième (par exemple 0 ou 1).

Exercice n°1 : sans utiliser la calculatrice, comparer les nombres rationnels : • $\frac{17}{19}$ et $-\frac{20}{31}$ • $\frac{7}{11}$ et $\frac{19}{15}$

b) Comparer en appliquant la méthode de la différence.

Propriété 2 : $a \leq b$ si et seulement si $a - b \leq 0$.
Ainsi pour comparer a et b, on peut parfois étudier le signe de la différence $a - b$.

Exercice n°2 : • sans utiliser la calculatrice, comparer les nombres $A = \left(\sqrt{3}+5\right)^2$ et $B = 10\sqrt{3}$

• en utilisant votre calculatrice, comparer les deux nombres $\sqrt{\pi}$ et $\frac{17}{9}$.

c) Comparer deux réels de même signe en comparant leur carrés :

Propriété 3 : Les carrés de deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que ces nombres :
Si $a > b > 0$ alors $a^2 > b^2$

Exercice n°3 : Soit a un réel tel que $a \geq \sqrt{5}$. Que peut on dire du carré de a ?

Soi b un réel tel que $b < 2$. Peut – on affirmer que $b^2 < 4$?

Propriété 4 : Les racines carrés de deux nombres positifs sont rangées dans le même ordre que ces nombres :
Si $a > b > 0$ alors $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

Exercice n°4 : sans utiliser la calculatrice, comparer les nombres $A = \sqrt{18}$ et $B = 4+\sqrt{2}$
Pour s'entraîner : exercice n°23 page 43.

d) Comparer des fractions.

Propriété 5 : Les inverses de deux nombres strictement positifs sont rangées dans l'ordre inverse de ces nombres : Si $a > b > 0$ alors $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Exercice n°5 : Soit a un réel tel que $a \geq \sqrt{5}$. Que peut on dire de l'inverse de a ?

sans utiliser la calculatrice, comparer les nombres $\frac{1}{23}$ et $\frac{1}{21}$

Pour comparer a et b, on peut parfois transformer leurs écritures pour obtenir des formes facilement comparables :

Exercice n°6 : sans utiliser la calculatrice, comparer les nombres $\frac{6}{7}$ et $\frac{7}{9}$; 1,7 et $\frac{17}{14}$.

e) Autres méthodes : utilisation de la calculatrice ou encore des règles sur les inégalités qui seront revues dans le III).

3°) Comparer des réels écrits sous forme algébrique (méthode voir livre page 37 B) :
Exercice n°7 : x étant un réel quelconque, comparer les nombres a et b définis par $a = x^2$ et $b = 2x - 1$
Pour s'entraîner exercice n°20 page 43

4°) **Encadrement** :

•Définition : on dit qu'on a encadré un réel *x* lorsqu'on a trouvé deux réels *a* et *b* tels que $a \leq x \leq b$.

• Exercice n°8 **:** Soit a un réel tel que $2 < a \leq 3$. Déterminer un encadrement de a^2.
Exercice n°9 **:** répondre par Vrai ou Faux
a) Il y a exactement cinq nombres décimaux strictement compris entre 5,17 et 5,23.
b) Si x est compris entre 2,1 et 5,4, alors x est compris entre 2 et 6.
c) Si $1,4 \leq x \leq 2,5$ est un encadrement de x, alors $2 \leq x \leq 2,3$ en est un aussi.
d) Si x est compris entre –3,1 et –2,7, alors x est compris entre –3 et –2.

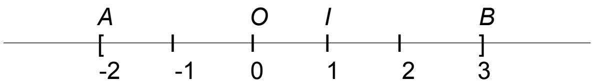
e) Si $2 \leq x \leq 2{,}3$ est un encadrement de x, alors $1{,}4 \leq x \leq 2{,}5$ en est un aussi.

II) Intervalles

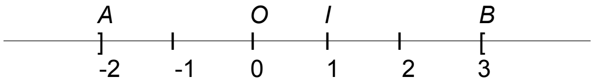
1°) Exemples :

(D) est un axe de repère (O, I), A et B sont les points de cet axe, d'abscisses respectives -2 et 3.
M est un point de (D) d'abscisse x.

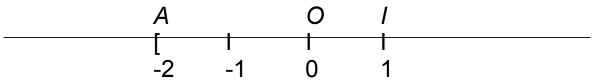
- Si M appartient au segment [AB], son abscisse vérifie : $-2 \leq x \leq 3$, et on dit alors que x appartient à l'intervalle fermé [-2 , 3].



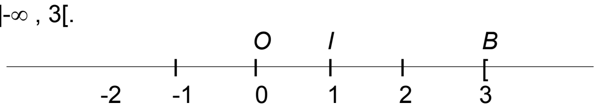
- L'inégalité $-2 < x < 3$ caractérise tous les points M du segment [AB], privé de A et de B. On dit alors que x appartient à l'intervalle ouvert]-2, 3[.



- L'inégalité $x \geq -2$ caractérise tous les points M de la demi-droite d'origine A contenant O. On dit alors que x appartient à l'intervalle [-2, +∞ [.



- L'inégalité $x < 3$ caractérise l'intervalle]-∞ , 3[.



On utilise des intervalles en les représentant graphiquement sur un axe

2°) *Exercice n°10* : x étant un nombre, traduisez par une ou plusieurs inégalité chacune des phrases :

a) x est compris entre 0 et 3
b) x est strictement compris entre -3 et 5
c) x est supérieur ou égal à 3
d) x est strictement supérieur à -5
e) x est inférieur ou égal à 3
f) x est strictement inférieur à -5

Exercice n°11 : Donnez et représentez graphiquement l'intervalle défini par chacune des inégalités :

a) $-3 \leq x \leq 1$ b) $1 < x < 5$ c) $-3 \leq x < 2$ d) $x > 5$ e) $x \leq -3$ f) $x < -5$

Exercice n°12 : Déterminez les inégalités vérifiées par tout élément x de chacun des intervalles :

a) A = [1, 5] b) B = [-1, 3 [c) C =]4, 5[d) D = [-1, +∞[e) E =]2, +∞[f) F =]-∞, 1[

Pour s'entraîner : exercices n°1,2 et 4 page 42, 12 à 14 page 42

3°) Intersection et réunion d'intervalles :

a) Définitions : voir livre page 36.
b) Déterminer une réunion ou une intersection d'intervalles : méthode page 37.

Exercice n°13 **:** Soit les intervalles donnés dans l'exercice n°10, déterminer $A \cap B$, $A \cup B$, $F \cap C$, $C \cup D$.
Pour s'entraîner : exercices n°27 à 30 page 37

III) Règles de calcul sur les inégalités (voir aussi livre page 301)

1°) Addition et inégalités :

<u>Propriété n°6 :</u>

Si on ajoute (ou retranche) un même nombre aux deux membres d'une inégalité, alors on obtient une inégalité équivalente. Si a > b ; alors a + c > b + c

Exercice n°14 : Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes et donner l'ensemble des solutions avec un intervalle

a) $x + 7 \leq 15$ b) $4x - 7 < 3x – 9$

2°) Multiplication et inégalités :

<u>Propriété n°7 :</u>

Si on **multiplie** (ou on divise) les deux membres d'une inégalité par un même nombre **positif non nul,** alors on obtient une **inégalité de même sens.** **Pour tous nombres a, b, c, lorsque c est strictement positif : si a > b ; alors ac > bc ($c \neq 0$)**

<u>Propriété n°8 :</u>

- Pour tous nombres a, b, c, lorsque c est strictement négatif : si $a \leq b$ alors $ac \geq bc$

- Si on **multiplie** les deux membres d'une inégalité par un même nombre **strictement négatif,** on obtient une **inégalité de sens contraire.**

***Exercice n°15** :* Sur sa copie, un élève a écrit les inégalités suivantes : $4 < 5$

$$4-\sqrt{3} < 5-\sqrt{3}$$
$$-2\left(4-\sqrt{3}\right) > -2\left(5-\sqrt{3}\right)$$
$$\frac{-2\left(4-\sqrt{3}\right)}{7} < \frac{-2\left(5-\sqrt{3}\right)}{7}.$$

Dire si ces inégalités sont justes et, si elles le sont, indiquer la propriété qui permet d'obtenir chaque inégalité à partir de la précédente.

Exercice n°16 **:** Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes : a) $3x > 6$ b) $\frac{3}{4}x \leq -\frac{1}{2}$ c) $-7x \leq 18$

3°) Savoir résoudre une inéquation du 1^er^ degré :

Exercice n°17 : Résoudre dans ℝ : a) $3x - 1 \geq 5x + 3$ b) $-5x \leq 0$ c) $\frac{3x+1}{2} < \frac{x}{4} - \frac{x+3}{8}$ d) $\frac{8x-5}{4} - \frac{x+1}{2} \leq x + \frac{x+7}{2}$

Pour s'entraîner : exercices n°39 à 47 page 45

4°) Déterminer un encadrement ***:***

Exercice n°18 **:**a) En mesurant une longueur a, on a trouvé $1{,}732 \leq a \leq 1{,}733$. Encadrer le nombre $A = \frac{10-2a}{5}$

b) Sachant que $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$, encadrer $2 + \frac{2}{x}$. *Pour s'entraîner exercices n°15 à 19 page 43*

IV) Valeur absolue, distance.

1°) Valeur absolue, définition :

On appelle valeur absolue d'un réel x le nombre noté $|x|$ qui est égal au nombre x si x est positif et au nombre –x si x est négatif.

Autrement dit : Si x est positif alors sa valeur absolue est lui même : si $x \geq 0$ alors $|x| = x$.

Si x est négatif alors sa valeur absolue est son opposé : si $x \leq 0$ alors $|x| = -x$.

Remarque : pour tout réel x , $|x| \geq 0$.

2°) Application ***: Exercice n°19*** *:* Dans chaque cas écrire sans utiliser la notation valeur absolue :

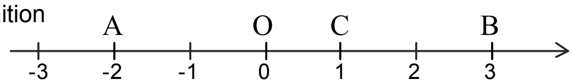
$\left|-\sqrt{7}\right|$, $\left|\sqrt{2}-1\right|$, $\left|10^{-5}\right|$, $|7|+|-2|$, $|7+(-2)|$, $|7|\times|-2|$

Exercice n°20 : Calculer à la main et vérifier le résultat à la calculatrice (voir méthode page 39).
Exercices n° 51 a) page 46 et 52 b) page 46

3°) Distance entre deux réels, définition

La distance entre deux réels a et b est la distance entre les points A et B d'abscisses respectives a et b sur la droite réelle munie d'un repère (O , I). On la note d(a ; b).
d(a ; b) = AB

Exercice n°21 **:** déterminer d (1 ; 3) , d (-2 ; 3)
Sur la figure ci-contre, 1 est l'abscisse de C et 3 est l'abscisse de B donc par définition la distance entre 1 et 3 est égale à CB.
d(1 ; 3) = CB = 2 ;



Remarques : d(1 ; 3) = $|1-3| = 3-1 = 2$

La distance entre 1 et 3 est égale à la distance entre 3 et 1.

4°) Lien entre distance et valeur absolue :

Théorème admis : $\boxed{\text{la distance entre deux réels a et b est égale à } |b-a|}$

d(a ; b) = $|a-b| = |b-a|$.

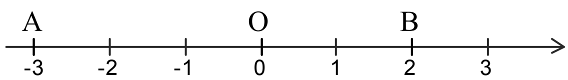
Ce théorème permet de calculer la distance entre deux réels sans dessins.

Application ***: Exercice n°22*** **:** Quelle est la distance de 3 à 10, de –4 à –9, de 5 à –2,5, de –100 à –1 000 ?

5°) Cas particulier : distance d'un réel a à zéro

Exercice n°23*:* déterminer d(0 , -3) , d (0 , 2)

d(0 ; -3) = $|-3| = 3$ =OA.



CHAPITRE ….. : ORDRE, INTERVALLES ET VALEURS ABSOLUES.

Soit x un réel et soit M le point d'abscisse x sur une droite graduée d'origine O. d(0 ; x) = $\lvert x \rvert$ = OM.

6°) Interpréter en terme de distance et résoudre une équation de la forme $\lvert x-a \rvert = r$.

Exercice n°24 : Résoudre les équations suivantes : a) $\lvert x-5 \rvert = 7$ b) $\lvert x+1 \rvert = 4$ c) $\lvert x-10 \rvert = 0$ d) $\lvert x-1 \rvert = -2$

7°) Résoudre une inéquation de la forme $\lvert x-a \rvert \leq r$.

***Exercice n° 25* :** Résoudre les inéquations suivantes : a) $\lvert x-4 \rvert \leq 0,5$ b) $\lvert x-10 \rvert \leq 0$ c) $\lvert x-8 \rvert \leq -0,1$ d) $\lvert x+7 \rvert \leq 5$

Pour s'entraîner : exercices n°56 à 60 page 47

8°) Passer d'un encadrement à une valeur absolue :

Exercice n°26 *:* a) Écrire l'encadrement $-4 < x < 2$ sous forme d'intervalle.

b) Déterminer le centre et le rayon de cet intervalle.

c) Á l'aide de la notation valeur absolue, en utilisant le rayon et le centre de l'intervalle, écrire une inégalité vérifiée par tous les réels tels que $-4 < x < 2$

Propriété :

Soit a et b deux réels tels que a < b : le centre de l'intervalle [a ; b] est le réel c = $\frac{a+b}{2}$.
le rayon de l'intervalle est [a ; b] est le réel r = $\frac{b-a}{2}$.

Pour s'entraîner : exercices n°61 et 62 page 47

9°) Relier les notions de valeur absolue, intervalle, distance.

Propriété :

Soit c un nombre réel et r un nombre réel positif, les quatre propositions suivantes sont équivalentes : ♦ La distance de x à c est inférieure ou égale à r ; ♦ $x \in \left[c-r ; c+r\right]$; ♦ $\lvert x-c \rvert \leq r$; ♦ $c - r \leq x \leq c+r$.

Exercice n°27 : Compléter, le tableau suivant.

Notation distance	Notation valeur absolue	Egalités ou inégalités	Valeurs ou intervalles
d(x ; 6) Â 2			
d(x ; -7) Â 4			
	$\lvert x - 8 \rvert$ Â 5		
		x = -5 ou x = 15	
			$x \in [-\frac{5}{2} ; \frac{5}{2}]$
	$\lvert x+5 \rvert = 6$		
		-19 < x < -15	

Pour s'entraîner : exercice n°48 page 48