CHAPITRE N°…. FONCTIONS AFFINES

I) Fonctions affines :

1°) Définition :

Soit a et b deux réels donnés.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par f(x)= ax +b est appelé fonction affine.

2°) Cas particuliers :
Si b = 0 , la fonction f : $x \mapsto$ ax est appelé **fonction linéaire**
Si a = 0, la fonction f : $x \mapsto$ b est appelé **fonction constante**.

3°) Exemple et contre-exemples :

a) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \frac{x+2}{3}$ est affine car $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$.

b) Les fonctions $f : x \mapsto \frac{2}{x} - 3$ et $g : x \mapsto \frac{5}{2} - 3x^2$ ne sont pas affines

4°) Savoir reconnaître une fonction affine (méthode A page 167) : *Exercice n°14 page 177*.

5°) Sens de variation :

a) Théorème 1 :

Si a > 0, alors la fonction affine f : $x \mapsto$ ax + b est croissante sur $\mathbb{R}$.
Si a < 0, alors la fonction affine f : $x \mapsto$ ax + b est décroissante sur $\mathbb{R}$.

b) Savoir déterminer le sens de variation d'une fonction affine (méthode B page 167) : *Exercice n°15 page 177*.
Pour s'entraîner exercices n°16 et 17 page 177.

II) Caractérisation d'une fonction affine :

1°) Propriété caractéristique d'une fonction affine :

a) Théorème :

Si f est une fonction affine alors l'accroissement Δy de l'image est proportionnel à l'accroissement Δx de la variable.

Autrement dit si f(x) = ax + b et si x_1 et x_2 sont deux réels distincts alors $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$.

Démontrer ce théorème.

b) Déterminer l'expression d'une fonction affine définie par deux réels distincts et leurs images :

Exercice n°18 page 177.

Méthode : on calcule l'accroissement de f(x) : $f(x_2) - f(x_1)$.
on calcule l'accroissement de x : $x_2 - x_1$.
on calcule ensuite $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$
on calcule enfin $b = y_1 - a\,x_1$.

Pour s'entraîner exercices n°19 à 21 page 177.

c) Démontrer qu'une fonction n'est pas affine
Exercice n°1 : On donne le tableau de valeurs ci-contre

x	-1	0	1
f(x)	4	2	1

La fonction f est-elle affine ?

Méthode : si les accroissements d'une fonction f ne sont pas proportionnels aux accroissements de la variable, alors f n'est pas une fonction affine.

2°) Réciproque :

Théorème :

Soit f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Si l'accroissement Δy de l'image est proportionnel à l'accroissement Δx de la variable alors cette fonction est affine.

Démonstration :
Considérer une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et pour laquelle "l'accroissement de l'image est proportionnel à l'accroissement de la variable". Noter k le coefficient de proportionnalité.

x étant un réel quelconque, écrire en fonction de k l'accroissement de l'image entre 0 et x.
En déduire que la fonction est affine.

3°) Conclusion :
Le fait que l'accroissement de la fonction est proportionnel à l'accroissement de la variable caractérise les fonctions affines.

III) Représentation graphique d'une fonction affine.

1°) Propriété :

Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine définie sur ℝ par f(x)= ax +b est la droite d'équation y = ax+b. le nombre a est le **coefficient directeur** de la droite. Le nombre b est **l'ordonnée à l'origine**, avec b = f(0).

Cas particuliers :
Lorsque b = 0, la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine O du repère.
Lorsque a = 0, la représentation graphique est une droite parallèle à l'axe des abscisses.

2°) Réciproque
toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées est la représentation graphique d'une fonction affine.

3°) Représenter une fonction affine (méthode F page 171) : *exercice n°44 page 180.*
Pour s'entraîner : Exercices n°43 à 47 page 180.48 à 51 page 180. n°66 page 183.

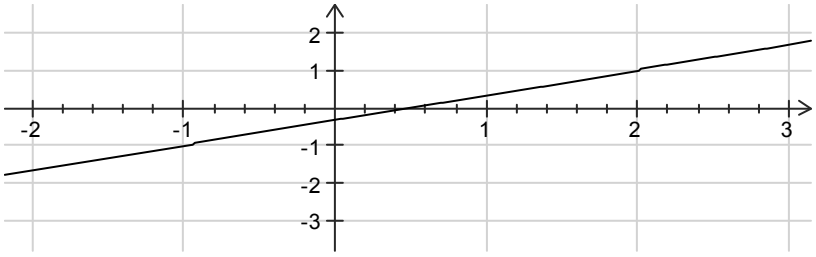
Méthode : pour représenter graphiquement une fonction affine, on peut utiliser : •deux points (plutôt trois) •ou bien le coefficient directeur et un point de la droite

4°) Détermination d'une fonction affine d'après sa représentation graphique :

Exercice n°2 : déterminer la fonction affine f dont la représentation graphique est donnée ci-contre

1ère méthode :
Déterminer d'abord le coefficient directeur puis l'ordonnée à l'origine en utilisant un point de la droite

2ième méthode : résoudre un système utilisant deux points de la droite.



Exercice n°3 : exercice n°42 page 180. *Pour s'entraîner : Exercices n°29 à 32 page 179.*

IV) Signe de ax + b

1°) Activité d'approche : voir TD n°…..

2°) Signe de ax+b

Théorème :

Lorsque a ≠0, la droite D représentant la fonction affine f : $x \mapsto ax + b$ traverse l'axe des abscisses au point d'abscisse $-\frac{b}{a}$.

Le signe de ax+b est donné par le tableau suivant :

x	-∞	$-\frac{b}{a}$	+∞
ax+b	signe de –**a**	0	signe de **a**

3°) Application directe *:*

Exercice n°4. a) Tracer les représentations graphiques des fonctions f et g définies sur Ë par f(x) = $\frac{1}{3}$ x - 2 et g(x) = -2x+1.

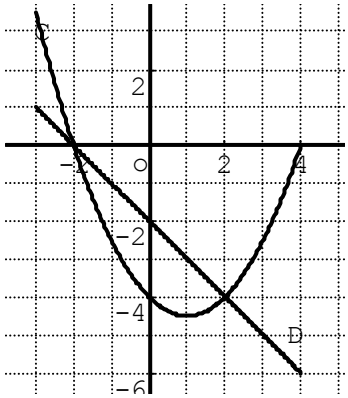
b) Préciser le sens de variation des fonctions f et g .
c) Résoudre f(x) = 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
Déterminer graphiquement le signe de f(x) (on donnera le signe de f dans un tableau).
d) Refaire le c) avec la fonction g.

4°) Etudier la position relative de deux courbes *:*

CHAPITRE N°…. FONCTIONS AFFINES

a) Par Lecture graphique :
Exercice n°5 :
Les fonctions f et g sont respectivement définies sur [-3 ; 4] par les courbe C et D
Utiliser ce graphique pour répondre aux questions suivantes :

- f(x) = g(x)
- f(x) < g(x)



b) Par le calcul
Suite de l'exercice n°5 : Les fonctions f et g sont respectivement définies sur [-3 ; 4] par

$f(x) = \frac{x^2}{2} - x - 4$ et g(x) = - x – 2 .

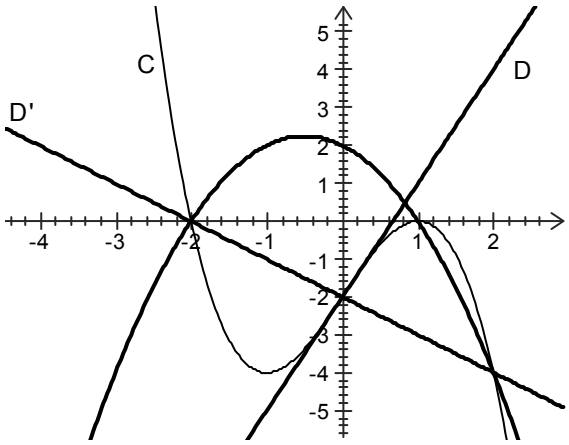
- Calculer f(x) – g(x)
- Vérifier que f(x) – g(x) = $\frac{(x-2)(x+2)}{2}$
- Résoudre l'équation f(x) = g(x).
- Etudier le signe de f(x) – g(x)
- Résoudre l'inéquation f(x) < g(x).

Méthode :

f(x) ≥ g(x) sur I équivaut à : la courbe représentative de f est située au dessus de la courbe représentative de g.

Exercice n°6 : Comparer les fonctions f et g définies sur [-4 , 5] par $f(x) = x^2 + 1$ et g(x) = 3x + 1

Méthode :

Pour comparer deux fonctions on peut étudier le signe de leur différence, éventuellement en factorisant et en utilisant un tableau de signe

Exercice n°7 :
a) Associer à chacune des courbes C et P et à chacune des droites D et D' une des fonctions ci-dessous définies sur ℝ.
$f(x) = -x^3 + 3x - 2$; $g(x) = -x^2 - x + 2$; h(x) = 3x – 2 ;
k(x) = -x – 2.
b) Indiquer selon les valeurs de x, les positions relatives :
des courbes C et P, de la courbe C et de la droite D, de le courbe C et de la droite D'.
c) Retrouver par le calcul toutes les réponses aux questions posées au 2°).